

Algebra — Exercise 3

Zadanie 1 Używając eliminacji Gaußa udowodnij następujące twierdzenie:

Jeśli $B = \{b_1, \dots, b_k\}$ jest bazą przestrzeni liniowej V , to zbiór liczący $k + 1$ wektorów jest liniowo zależny.

W tym celu wyraż wektory $v_1, \dots, v_{k+1}$ w bazie B i przeprowadź na tej reprezentacji eliminację Gaußa. Wynioskuj z tego twierdzenia, że każde dwie bazy przestrzeni skończonej wymiarowej są równoliczne.

Exercise 1 Using the Gaussian elimination method, prove the following theorem:

If $B = \{b_1, \dots, b_k\}$ is a basis of a vector space V , then any set of $k + 1$ vectors is linearly dependent.

To this end, express the vectors $v_1, \dots, v_{k+1}$ in basis B and perform the Gaussian elimination on this representation.

Conclude that the bases of every two finite-dimensional vector spaces have the same cardinality.

Zadanie 2 Niech $W \leq V$ będą przestrzeniami liniowymi, zaś $U \subseteq V$. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

- (1) istnieje wektor $u \in V$, taki że $U = u + W$;
- (2) istnieje wektor $u \in U$, taki że $U = u + W$;
- (3) dla każdego wektora $u \in U$ zachodzi $U = u + W$;
- (4) istnieje wektor $u \in V$, taki że $U - u$ jest przestrzenią liniową;
- (5) istnieje wektor $u \in U$, taki że $U - u$ jest przestrzenią liniową;
- (6) dla każdego wektora $u \in U$ zbiór $U - u$ jest przestrzenią liniową.

Exercise 2 Let $W \leq V$ be two linear spaces, and $U \subseteq V$. Prove that the following conditions are equivalent:

- (1) there is a vector $u \in V$, such that $U = u + W$;
- (2) there is a vector $u \in U$, such that $U = u + W$;
- (3) for each vector $u \in U$ it holds that $U = u + W$;
- (4) there is a vector $u \in V$, such that $U - u$ is a linear space;
- (5) there is a vector $u \in U$, such that $U - u$ is a linear space;
- (6) for each vector $u \in U$, the set $U - u$ is a linear space.

Zadanie 3 Niech $V' < V$ będzie podprzestrzenią liniową, zaś U i U' jej warstwami. Pokaż, że

$$U = U' \quad \text{lub} \quad U \cap U' = \emptyset.$$

Możesz skorzystać z Zadania 2, nawet jeśli nie umiesz go udowodnić.

Exercise 3 Let $V' < V$ be a linear subspace, and let U and U' be its cosets. Show that

$$U = U' \quad \text{or} \quad U \cap U' = \emptyset.$$

You can use Exercise 2, even if you cannot prove it.

Zadanie 4 Niech S, T będą skończenie-wymiarowymi podprzestrzeniami przestrzeni V . Pokaż, że

$$\dim(S) + \dim(T) = \dim(S \cap T) + \dim(S + T).$$

Wskazówka: rozszerz bazę $S \cap T$ do baz S oraz T .

Z tego twierdzenia możesz korzystać w kolejnych zadaniach, nawet jeśli nie umiesz go udowodnić.

Exercise 4 Let S, T be the finite-dimensional subspaces of the vector space V . Show that

$$\dim(S) + \dim(T) = \dim(S \cap T) + \dim(S + T).$$

Note: Extend the basis $S \cap T$ to the bases S and T .

You can use this property in the next exercise, even if you cannot prove it.

Zadanie 5 Wyznacz wymiary $\text{LIN}(S) \cap \text{LIN}(T)$ oraz $\text{LIN}(S) + \text{LIN}(T)$ dla

- (1) $S = \{(1, 2, 0, 1), (1, 1, 1, 0)\}$, $T = \{(1, 0, 1, 0), (1, 3, 0, 1)\}$;
- (2) $S = \{(1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1), (1, 3, 1, 3)\}$, $T = \{(1, 2, 0, 2), (1, 2, 1, 2), (3, 1, 3, 1)\}$;
- (3) $S = \{(2, -1, 0, -2), (3, -2, 1, 0), (1, -1, 1, -1)\}$, $T = \{(3, -1, -1, 0), (0, -1, 2, 3), (5, -2, -1, 0)\}$.

W każdym przypadku podaj dowolną bazę $\text{LIN}(S) + \text{LIN}(T)$.

Exercise 5 Determine the dimensions of $\text{LIN}(S) \cap \text{LIN}(T)$ and $\text{LIN}(S) + \text{LIN}(T)$ for

- (1) $S = \{(1, 2, 0, 1), (1, 1, 1, 0)\}$, $T = \{(1, 0, 1, 0), (1, 3, 0, 1)\}$;
- (2) $S = \{(1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1), (1, 3, 1, 3)\}$, $T = \{(1, 2, 0, 2), (1, 2, 1, 2), (3, 1, 3, 1)\}$;
- (3) $S = \{(2, -1, 0, -2), (3, -2, 1, 0), (1, -1, 1, -1)\}$, $T = \{(3, -1, -1, 0), (0, -1, 2, 3), (5, -2, -1, 0)\}$.

In each case give any basis of $\text{LIN}(S) + \text{LIN}(T)$.

Zadanie 6 Wyznacz bazę obrazu dla następujących przekształceń liniowych (z $\mathbb{R}^3$)

- (1) $F(x, y, z) = (2x + y, 3x - z, 5x + y - z, -2x + 2y - 2z)$;
- (2) $G(x, y, z) = (x + y, y - 2z, 3z, x - y)$;
- (3) $H(x, y, z) = (x + y, y + z)$;
- (4) $I(x, y, z) = (x + y, 2y + z, y - z)$;
- (5) $J(x, y, z) = (x + y, 2x + 2y, 3x + 3y)$.

Wskazówka: Możesz skorzystać z faktu:

Jeśli $F : V \rightarrow W$ oraz $\text{LIN}(b_1, \dots, b_k) = V$ to $\text{LIN}(F(b_1), \dots, F(b_k)) = \text{Im } F$.

Exercise 6 Determine the basis of the image of the following linear transformations (from $\mathbb{R}^3$)

- (1) $F(x, y, z) = (2x + y, 3x - z, 5x + y - z, -2x + 2y - 2z)$;
- (2) $G(x, y, z) = (x + y, y - 2z, 3z, x - y)$;
- (3) $H(x, y, z) = (x + y, y + z)$;
- (4) $I(x, y, z) = (x + y, 2y + z, y - z)$;
- (5) $J(x, y, z) = (x + y, 2x + 2y, 3x + 3y)$.

Hint: You can take advantage of the fact that:

If $F : V \rightarrow W$ and $\text{LIN}(b_1, \dots, b_k) = V$, then $\text{LIN}(F(b_1), \dots, F(b_k)) = \text{Im } F$.

Zadanie 7 Rozważmy przestrzeń wielomianów o stopniu najwyżej 7 nad ciałem $\mathbb{Z}_5$ oraz przekształcenie liniowe zdefiniowane jako suma pierwszej i drugiej pochodnej, tj.: $F(x^i) = ix^{i-1} + i(i-1)x^{i-2}$, gdzie $i(i-1)x^{i-2}$ dla $i < 2$ oznacza 0. Podaj bazy jądra $\ker F$ i obrazu $\text{Im } F$ tego przekształcenia. Podaj ich wymiary.

Wskazówka: Możesz skorzystać ze wskazówki do zadania 6 oraz (nieudowodnionego) twierdzenia mówiącego, że $\dim(V) = \dim(\ker(F)) + \dim(\text{Im}(F))$.

Exercise 7 Consider the vector space of polynomials of degree at most 7 over the field $\mathbb{Z}_5$ and a linear transformation defined as the sum of the first and second order derivatives, i.e., $F(x^i) = ix^{i-1} + i(i-1)x^{i-2}$ where $i(i-1)x^{i-2}$ for $i < 2$ is 0. Give a basis of the kernel $\ker F$ and the image $\text{Im } F$ of the transformation. Specify the dimensions.

Hint: You can use the hint of the exercise 6 and (not proved) theorem that states, $\dim(V) = \dim(\ker(F)) + \dim(\text{Im}(F))$.

Zadanie 8 Dane jest przekształcenie liniowe $F : V \rightarrow W$. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

- (1) F jest różnowartościowe;
- (2) $\dim(\ker(F)) = 0$;
- (3) $\ker(F)$ składa się z jednego wektora;
- (4) $\dim(\text{Im}(F)) = \dim(V)$.

Exercise 8 We are given a linear transformation $F : V \rightarrow W$. Prove that, the following conditions are equivalent:

- (1) F is injective;
- (2) $\dim(\ker(F)) = 0$;
- (3) $\ker(F)$ consists of one vector;
- (4) $\dim(\text{Im}(F)) = \dim(V)$.

Zadanie 9 Załóżmy, że dla przekształcenia liniowego $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zachodzi $L^3(v) = \vec{0}$, dla każdego wektora $v \in \mathbb{R}^2$. Pokaż, że wtedy również $L^2(v) = \vec{0}$, dla każdego wektora v .

Udowodnij uogólnienie tego faktu:

Jeśli dla $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ oraz pewnego $k > n$ zachodzi $L^k(v) = \vec{0}$ dla dowolnego v , to zachodzi również $L^n(v) = \vec{0}$.

Hint: Rozważ wektory $v, L(v), L^2(v), \dots, L^n(v)$. Są one liniowo zależne.

Exercise 9 Suppose that, for the linear transformation $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, it holds that $L^3(v) = \vec{0}$ for each vector $v \in \mathbb{R}^2$. Show that $L^2(v) = \vec{0}$ for each vector v .

Prove the generalization of this fact:

If the $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ and for some $k > n$ it holds that $L^k(v) = \vec{0}$ for each v , then $L^n(v) = \vec{0}$.

Hint: Consider vectors $v, L(v), L^2(v) \dots, L^n(v)$. They are linearly dependent.

Zadanie 10 Załóżmy, że dla przestrzeni liniowych $U, V \leq W$ zachodzi

$$\dim(U + V) = 1 + \dim(U \cap V) \ .$$

Udowodnij, że suma $U + V$ jest jedną z przestrzeni U, V , a przecięcie $U \cap V$ — drugą.

Exercise 10 Suppose that, for linear spaces $U, V \leq W$

$$\dim(U + V) = 1 + \dim(U \cap V) \ .$$

Prove that the sum of $U + V$ is one of the spaces U, V and the intersection $U \cap V$ is the other.