

Algebra — Lista 4

Zadanie 1 Pokaż, że dla macierzy A, B, C odpowiednich wymiarów oraz składowej α zachodzą następujące zależności (Id oznacza macierz identycznościową/jednostkową odpowiedniego wymiaru, tj. mającą na przekątnej jedynkę oraz zera w innych miejscach):

$$\begin{aligned}\text{Id} \cdot A &= A \\ A \cdot \text{Id} &= A \\ A \cdot (B + C) &= A \cdot B + A \cdot C \\ (A + B) \cdot C &= A \cdot C + B \cdot C \\ \alpha(A \cdot B) &= (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B) \\ A[B|C] &= [AB|AC] \\ \left[\begin{array}{c} B \\ C \end{array} \right] A &= \left[\begin{array}{c} BA \\ CA \end{array} \right]\end{aligned}$$

Pokaż też, że zbiór macierzy $n \times m$ nad $\mathbb{F}$ jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{F}$.

Zadanie 2 Pokaż, że

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T.$$

gdzie A^T to macierz transponowana do A . Nie zakładamy, że A, B są kwadratowe.

Zadanie 3 Zdefiniujmy $f_0 = 0, f_1 = 1$ oraz $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Rozważmy macierz $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Pokaż, że dla $k \geq 1$ zachodzi

$$M^k = \begin{bmatrix} f_{k-1} & f_k \\ f_k & f_{k+1} \end{bmatrix} \text{ oraz } M^k \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_k \\ f_{k+1} \end{bmatrix}.$$

Rozważając równość $M^{n+k} = M^k \cdot M^n$ wyprowadź zależność:

$$f_{n+k} = f_{k-1}f_n + f_kf_{n+1} = f_kf_{n-1} + f_{k+1}f_n.$$

Zadanie 4 Podaj zwartą postać macierzy (nad $\mathbb{R}$)

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}^n.$$

Zadanie 5 Oblicz (macierze są nad $\mathbb{R}$) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^2; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^3; \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$

Zadanie 6 Ustalmy macierz A wymiaru $n \times n$. Pokaż, że zbiór macierzy B komutujących z A , tj.:

$$\{B : AB = BA\}$$

jest przestrzenią liniową.

Znajdź wszystkie macierze B wymiaru 2×2 spełniające warunek $B \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot B$.

Zadanie 7 (Macierze symetryczne) Kwadratową macierz $M = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ nazywamy *symetryczną*, jeśli $a_{ij} = a_{ji}$ dla każdego i, j (innymi słowy: $M^T = M$).

Niech M, N będą macierzami symetrycznymi rozmiaru $n \times n$. Pokaż, że:

- $M + N$ jest macierzą symetryczną;
- MN jest macierzą symetryczną wtedy i tylko wtedy gdy M, N komutują (tj. $MN = NM$).

Zadanie 8 Pokaż, że każdą macierz A wymiaru $n \times n$ można przedstawić jako iloczyn (pewnej ilości) macierzy ze zbioru

$$\{T_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n} \cup \{\text{Id} + \alpha 1_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n, \alpha \in \mathbb{F}} \cup \{D_{i,\alpha}\}_{i=1,\dots,n, \alpha \in \mathbb{F}}.$$

Wskazówka: Zastosuj metodę eliminacji Gaussa na kolumnach, aby sprowadzić macierz do postaci schodkowej. Potem zastosuj eliminację na wierszach, aby sprowadzić macierz do postaci przekątnej. Przedstaw macierz przekątniową jako iloczyn odpowiednich $D_{i,\alpha}$ (zauważ, że dopuszczamy $\alpha = 0$). Zinterpretuj te operacje jako mnożenie macierzy i odwróć kolejne operacje.

Zadanie 9 (Ślad macierzy) Śladem macierzy kwadratowej jest suma elementów na jej przekątnej, tj.

$$\text{tr} \left((a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \right) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Pokaż, że:

- $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^T)$;
- $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Zadanie 10 Niech M, N będą macierzami górnotrójkątnymi. Pokaż, że:

- ich suma $M + N$ też jest macierzą górnotrójkątną;
- ich iloczyn też jest macierzą górnotrójkątną.

Pokaż też analogiczną własność macierzy dolnotrójkątnych.

Zadanie 11 (Nierówność Frobeniusa); z gwiazdką: nie liczy się do podstawy Udowodnij, że dla dowolnych przekształceń liniowych F, G, H (o odpowiednich dziedzinach i przeciwdziedzinach) zachodzi:

$$\text{rk}(FG) + \text{rk}(GH) \leq \text{rk}(G) + \text{rk}(FGH).$$