

Algebra — Lista 4

Zadanie 1 Pokaż, że dla macierzy A, B, C odpowiednich wymiarów oraz skalaru α zachodzą następujące zależności (Id oznacza macierze identycznościową/jednostkową odpowiedniego wymiaru, tj. mającą na przekątnej jedynkę oraz zera w innych miejscach):

$$\begin{aligned}\text{Id} \cdot A &= A \cdot \text{Id} = A \\ A \cdot (B + C) &= A \cdot B + A \cdot C \\ (A + B) \cdot C &= A \cdot C + B \cdot C \\ \alpha(A \cdot B) &= (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B) \\ A[B|C] &= [AC|AC] \\ \left[\begin{array}{c} B \\ C \end{array} \right] A &= \left[\begin{array}{c} BA \\ CA \end{array} \right]\end{aligned}$$

Wynioskuj z tego, że zbiór macierzy $n \times m$ nad $\mathbb{F}$ jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{F}$.

Exercise 1 Show that, for the matrices A, B, C of the appropriate dimensions the following equalities hold, where α is a scalar and Id denotes the identity/unit matrix of the corresponding dimension, ie. having a diagonal of one and zero in other entries:

$$\begin{aligned}\text{Id} \cdot A &= A \cdot \text{Id} = A \\ A \cdot (B + C) &= A \cdot B + A \cdot C \\ (A + B) \cdot C &= A \cdot C + B \cdot C \\ \alpha(A \cdot B) &= (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B) \\ A[B|C] &= [AC|AC] \\ \left[\begin{array}{c} B \\ C \end{array} \right] A &= \left[\begin{array}{c} BA \\ CA \end{array} \right]\end{aligned}$$

Conclude from the above that the set of matrices of size $n \times m$ over $\mathbb{F}$ is a linear space over $\mathbb{F}$.

Zadanie 2 Pokaż, że

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T.$$

gdzie A^T to macierz transponowana do A . Nie zakładamy, że A, B są kwadratowe.

Exercise 2 Show that

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T.$$

where A^T is the transpose matrix of A . We do not assume that A, B are square matrices.

Zadanie 3 Zdefiniujmy $f_0 = 0, f_1 = 1$ oraz $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Rozważmy macierz $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Pokaż, że dla $k \geq 1$ zachodzi

$$M^k = \begin{bmatrix} f_{k-1} & f_k \\ f_k & f_{k+1} \end{bmatrix} \text{ oraz } M^k \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_k \\ f_{k+1} \end{bmatrix}.$$

Rozważając równość $M^{n+k} = M^k \cdot M^n$ wyprowadź zależność:

$$f_{n+k} = f_{k-1}f_n + f_kf_{n+1} = f_kf_{n-1} + f_{k+1}f_n.$$

Exercise 3 Define $f_0 = 0, f_1 = 1$ and $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Consider the matrix $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Show that for $k \geq 1$, the following holds:

$$M^k = \begin{bmatrix} f_{k-1} & f_k \\ f_k & f_{k+1} \end{bmatrix} \text{ and } M^k \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_k \\ f_{k+1} \end{bmatrix}.$$

By considering the equation $M^{n+k} = M^k \cdot M^n$ derive the relation:

$$f_{n+k} = f_{k-1}f_n + f_kf_{n+1} = f_kf_{n-1} + f_{k+1}f_n.$$

Zadanie 4 Podaj zwartą postać macierzy (nad $\mathbb{R}$)

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}^n.$$

Exercise 4 Give a compact form of the matrix (over $\mathbb{R}$)

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}^n.$$

Zadanie 5 Oblicz (macierze są nad $\mathbb{R}$) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^2; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^3; \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$

Exercise 5 Calculate (matrices are over $\mathbb{R}$) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^2; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^3; \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$

Zadanie 6 Ustalmy macierz A wymiaru $n \times n$. Pokaż, że zbiór macierzy B komutujących z A , tj.:

$$\{B : AB = BA\}$$

jest przestrzenią liniową.

Znajdź wszystkie macierze B wymiaru 2×2 spełniające warunek $B \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot B$.

Exercise 6 Let us consider a matrix A of dimension $n \times n$. Show that the set of matrices B that commute with A , ie:

$$\{B : AB = BA\}$$

is a linear space.

Find all matrices B of dimension 2×2 satisfying the condition $B \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot B$.

Zadanie 7 (Macierze symetryczne) Kwadratową macierz $M = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ nazywamy *symetryczną*, jeśli $a_{ij} = a_{ji}$ dla każdego i, j (innymi słowy: $M^T = M$).

Niech M, N będą macierzami symetrycznymi rozmiaru $n \times n$. Pokaż, że:

- $M + N$ jest macierzą symetryczną;
- MN jest macierzą symetryczną wtedy i tylko wtedy gdy M, N komutują (tj. $MN = NM$).

Exercise 7 (Symmetric matrices) A square matrix $M = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ is called *symmetric*, if $a_{ij} = a_{ji}$ for every i, j (In other words: $M^T = M$).

Let M, N be symmetric matrices of size $n \times n$. Show that:

- $M + N$ is a symmetric matrix;
- MN is a symmetric matrix if and only if M, N commute (ie. $MN = NM$).

Zadanie 8 Pokaż, że każdą macierz A wymiaru $n \times n$ można przedstawić jako iloczyn (pewnej ilości) macierzy ze zbioru

$$\{T_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n} \cup \{\text{Id} + \alpha 1_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n, \alpha \in \mathbb{F}} \cup \{D_{i,\alpha}\}_{i=1,\dots,n, \alpha \in \mathbb{F}}.$$

Wskazówka: Zastosuj metodę eliminacji Gaussa na kolumnach, aby sprowadzić macierz do postaci schodkowej. Potem zastosuj eliminację na wierszach, aby sprowadzić macierz do postaci przekątniowej. Przedstaw macierz przekątniową jako iloczyn odpowiednich $D_{i,\alpha}$ (zauważ, że dopuszczamy $\alpha = 0$). Zinterpretuj te operacje jako mnożenie macierzy i odwróć kolejne operacje.

Exercise 8 Show that, each matrix A of dimension $n \times n$ can be represented as the product of a certain number of matrices from the set

$$\{T_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n} \cup \{\text{Id} + \alpha 1_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n, \alpha \in \mathbb{F}} \cup \{D_{i,\alpha}\}_{i=1,\dots,n, \alpha \in \mathbb{F}}.$$

Hint: Apply the Gaussian elimination method to the columns, to convert the matrix into the column echelon form. Then apply the elimination on the rows to convert the matrix into the diagonal form. Then represent a diagonal matrix as a product of appropriate $D_{i,\alpha}$ (observe that we do allow $\alpha = 0$). Interpret these operations as matrix multiplication and reverse the subsequent operations.

Zadanie 9 (Ślad macierzy) Śladem macierzy kwadratowej jest suma elementów na jej przekątnej, tj.

$$\text{tr} \left((a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \right) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Pokaż, że:

- $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^T)$;
- $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Exercise 9 (Trace of a matrix) The *trace* of a square matrix is the sum of elements on its diagonal:

$$\text{tr} \left((a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \right) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Show that:

- $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^T)$;
- $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Zadanie 10 Niech M, N będą macierzami górnortrójkątnymi. Pokaż, że:

- ich suma $M + N$ też jest macierzą górnortrójkątną;
- ich iloczyn też jest macierzą górnortrójkątną.

Pokaż też analogiczną własność macierzy dolnortrójkątnych.

Exercise 10 Let M, N be upper-triangular matrices. Show that:

- their sum $M + N$ is also a upper-triangular matrix;
- their product is also a upper-triangular matrix.

Also show the analogy for the lower-triangular matrices.

Zadanie 11 (Nierówność Frobeniusa); z gwiazdką: nie liczy się do podstawy Udowodnij, że dla dowolnych przekształceń liniowych F, G, H (o odpowiednich dziedzinach i przeciwdziedzinach) zachodzi:

$$\text{rk}(FG) + \text{rk}(GH) \leq \text{rk}(G) + \text{rk}(FGH).$$

Exercise 11(Frobenius inequality); With star: does not count for base Prove that for any linear transformations F, G, H (with corresponding domains and co-domains):

$$\text{rk}(FG) + \text{rk}(GH) \leq \text{rk}(G) + \text{rk}(FGH).$$