

Algebra — Lista 5

Zadanie 1 Niech M będzie odwracalną macierzą dolnotrójkątną/górnortrójkątną/symetryczną/diagonalną. Pokaż, że M^{-1} również jest dolnotrójkątną/górnortrójkątną/symetryczną/diagonalną.

Exercise 1 Let M be an upper triangular/lower triangular/symmetric/diagonal invertible matrix. Show that M^{-1} is also an upper triangular/lower triangular/symmetric/diagonal matrix.

Zadanie 2 Pokaż, że jeśli A jest macierzą odwracalną a B macierzą odpowiedniego rozmiaru (tzn. taką, że mnożenie AB jest określone) to

$$\text{rk}(AB) = \text{rk}(B) .$$

Exercise 2 Show that if A is an invertible matrix and B is a matrix of appropriate size (ie. the multiplication of AB is well-defined) then,

$$\text{rk}(AB) = \text{rk}(B) .$$

Zadanie 3 Znajdź wszystkie macierze A wymiaru 2×2 spełniające warunek $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Wskazówka: Pokaż najpierw, że $\text{rk}(A) = 2$ implikuje $\text{rk}(A^2) = 2$. Potem rozpatrz możliwe $\text{rk}(A)$.

Exercise 3 Find all the matrices A of dimension 2×2 satisfying the condition, $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Hint: First show that $\text{rk}(A) = 2$ implies $\text{rk}(A^2) = 2$. Then consider possible values of $\text{rk}(A)$.

Zadanie 4 *Minor* A to dowolna macierz utworzona z A poprzez usunięcie pewnego zbioru kolumn i pewnego zbioru wierszy.

Pokaż, że dla (niekoniecznie kwadratowej) macierzy A zachodzi:

$$\text{rk}(A) = \max\{\text{rk}(A') : A' \text{ jest macierzą kwadratową i minorem } A\} .$$

Wskazówka: może być pomocne, że rząd kolumnowy i wierszowy są sobie równe.

Exercise 4 A *minor* of A is any matrix formed from A by removing a set of columns and a set of rows.

Show that for any (not necessarily square) matrix A , the following holds:

$$\text{rk}(A) = \max\{\text{rk}(A') : A' \text{ is a square matrix and a minor of } A\} .$$

Note: It may be helpful that the column rank and row rank are equal.

Zadanie 5 Znajdź rząd podanej poniżej macierzy (o wartościach w $\mathbb{R}$) w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} 5 & p & 5 & p \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ p & p & 2 & 2 \end{bmatrix} .$$

Exercise 5 Find the rank of the matrix shown below (with entries in $\mathbb{R}$) depending on the parameter $p \in \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} 5 & p & 5 & p \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ p & p & 2 & 2 \end{bmatrix} .$$

Zadanie 6 Wyznacz bazy jądra przekształceń zadanych przez macierze (o wartościach w $\mathbb{R}$):

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -4 & 2 \\ 2 & 4 & -6 & 3 \\ 11 & 17 & -8 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 9 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} .$$

Exercise 6 Determine the basis of the kernel of the transformations given by the matrices (with values in $\mathbb{R}$):

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -4 & 2 \\ 2 & 4 & -6 & 3 \\ 11 & 17 & -8 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 9 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} .$$

Zadanie 7 Wyznacz macierze poniższych przekształceń w bazie standardowej odpowiedniego $\mathbb{R}^n$:

- $(x, y, z) \mapsto (x_1, x_1 + 2x_2, x_2 + 3x_3)$;
- obrót przestrzeni $\mathbb{R}^2$ o kąt α (w lewo, tj. przeciwnie do ruchu wskazówek zegara);
- symetrii $\mathbb{R}^2$ względem prostej zadanej równaniem $y = 2x$.

Exercise 7 Give the matrices (in the standard basis of the appropriate $\mathbb{R}^n$) of the following linear transformations:

- $(x, y, z) \mapsto (x_1, x_1 + 2x_2, x_2 + 3x_3)$;
- rotation of space $\mathbb{R}^2$ by an angle α (left, ie. Counter clockwise);
- symmetry $\mathbb{R}^2$ with respect to the line given by the equation $y = 2x$.

Zadanie 8 Niech M będzie macierzą wymiaru $n \times n$:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Oblicz rząd macierzy M^k dla każdego $k \geq 1$.

Exercise 8 Let M be a matrix of dimension $n \times n$:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculate the rank of the matrix M^k for every $k \geq 1$.

Zadanie 9 Jeśli AB jest odwracalna to A i B są.

Niech A, B będą macierzami odwracalnymi. Pokaż, że

- AB też jest macierzą odwracalną i $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- A^{-1} jest odwracalna i $(A^{-1})^{-1} = A$

Exercise 9 If AB is an invertible matrix then A and B are also invertible.

Let A, B are invertible matrices. Show that,

- AB matrix is also an invertible matrix and $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- A^{-1} is invertible and $(A^{-1})^{-1} = A$

Zadanie 10

Sprawdź, czy podane poniżej macierze są odwracalne i podaj ich macierze odwrotne:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^2, \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercise 10 Verify whether the below matrices are invertible and calculate their inverses:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^2, \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$