

Algebra — Exercise 6

Zadanie 1 Niech V będzie przestrzenią wielomianów o współczynnikach z $\mathbb{R}$ i stopnia najwyżej 3. Rozważmy układy wektorów x^0, x^1, x^2, x^3 oraz $x^0, x^0 + x^1, x^0 + x^1 + x^2, x^0 + x^1 + x^2 + x^3$. Udowodnij, że są one bazami. Zapisz macierz przejścia między tymi bazami.

Rozważmy przekształcenie $F : V \rightarrow V$ zadane jako $F(f) = f' + 2f'' + f'''$, gdzie $'$ oznacza pochodną. Wyznacz macierz tego przekształcenia w dwóch podanych powyżej bazach.

Exercise 1 Let V be a linear space of polynomial with the coefficients from $\mathbb{R}$ and the degree at most 3. Consider the system of vectors, x^0, x^1, x^2, x^3 and $x^0, x^0 + x^1, x^0 + x^1 + x^2, x^0 + x^1 + x^2 + x^3$. Prove that they are bases. Write the transition matrix between these bases.

Let us consider a linear transformation $F : V \rightarrow V$ given by $F(f) = f' + 2f'' + f'''$, where $'$ is the derivative. Determine the matrices of this transformation in the two above bases.

Zadanie 2 Rozważmy macierze A wymiaru $n \times n$, C wymiaru $m \times m$, B wymiaru $m \times n$ i macierz wymiaru $n \times m$ złożoną z samych 0 (zapiszmy ją jako $\mathbf{0}$). Wtedy notacja

$$\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ B & C \end{bmatrix}$$

oznacza macierz uzyskaną poprzez zestawienie obok siebie odpowiednich macierzy (tj. macierz A wypełnia lewy górny róg, macierz B lewy dolny, macierz C prawy dolny a macierz $\mathbf{0}$ prawy górny). Pokaż, że

$$\det(M) = \det(A) \cdot \det(C).$$

Exercise 2 Let us consider the matrices A of dimension $n \times n$, C of dimension $m \times m$, B of dimension $m \times n$ and a matrix of dimension $n \times m$ consisting of only 0 (Write it as $\mathbf{0}$). Then the notation

$$\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ B & C \end{bmatrix}$$

denotes the matrix obtained by concatenating the corresponding matrices next to each other (ie. matrix A is written in the left upper corner, matrix B left bottom, matrix C right bottom, and matrix $\mathbf{0}$ top right). Show that

$$\det(M) = \det(A) \cdot \det(C).$$

Zadanie 3

Liczby 144228, 532270, 257567, 209270, 289017, 519792 są podzielne przez 17. Udowodnij, że

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 & 2 & 2 & 8 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 & 0 \\ 2 & 8 & 9 & 0 & 1 & 7 \\ 5 & 1 & 9 & 7 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

też dzieli się przez 17. W miarę możliwości — bez obliczania tego wyznacznika.

Wskazówka: $\mathbb{Z}_{17}$ i metoda eliminacji.

Exercise 3 Numbers 144228, 532270, 257567, 209270, 289017, 519792 are divisible by 17. Prove that

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 & 2 & 2 & 8 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 & 0 \\ 2 & 8 & 9 & 0 & 1 & 7 \\ 5 & 1 & 9 & 7 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

is also divisible by 17. If possible — without calculating this determinant.

Hint: $\mathbb{Z}_{17}$ and Gaußian elimination.

Zadanie 4 Podane na wykładzie rozwinięcie Laplace'a zdefiniowane jest dla pierwszej kolumny. Uogólnij je na dowolną kolumnę i wiersz, tj. pokaże, że dla dowolnego j zachodzi

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{ij})$$

oraz dla dowolnego i zachodzi

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{ij}),$$

gdzie A_{ij} jest minorem powstałym przez wykreślenie i -tego wiersza oraz j -tej kolumny.

Wskazówka: wystarczy transpozycja i zamiana kolumn.

Exercise 4 The Laplace expansion given in the lecture is defined for the first column. Generalize it to any column and row, ie. show that for any j

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{ij})$$

and for any i ,

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{ij}),$$

where A_{ij} is the minor that is obtained from A by the deletion of i th row and j th column.

Hint: It is enough to consider the transpose and column switching.

Zadanie 5 Oblicz wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 5 & -4 \\ 3 & 1 & 2 & 9 & 8 \\ -1 & 7 & -3 & 8 & -9 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -6 & -3 \end{vmatrix}.$$

Exercise 5 Calculate the determinants:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 5 & -4 \\ 3 & 1 & 2 & 9 & 8 \\ -1 & 7 & -3 & 8 & -9 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -6 & -3 \end{vmatrix}.$$

Zadanie 6 Niech $A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{bmatrix}$. Oblicz AA^T i jej wyznacznik. Wywnioskuj z tego, ile wynosi $\det(A)$.

Exercise 6 Let $A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{bmatrix}$. Calculate AA^T and its determinant. Derive the value of $\det(A)$ from it.

Zadanie 7 Oblicz wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix}.$$

Exercise 7 Calculate the determinants:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix}.$$

Zadanie 8 Oblicz wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 20 & 19 & 18 & 17 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 + b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n + b_n \end{vmatrix}.$$

Exercise 8 Calculate the determinants:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 20 & 19 & 18 & 17 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 + b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n + b_n \end{vmatrix}.$$

Zadanie 9 Zadanie to polega na pokazaniu alternatywnego dowodu tw. Cauchy'ego.

Niech A, B, C będą macierzami wymiaru $n \times n$, gdzie $C = AB$ oraz $\text{rk}(A) = \text{rk}(B) = n$.

Rozważ macierz $\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ -\text{Id} & B \end{bmatrix}$. Ile wynosi jej wyznacznik?

Pokaż, że przy pomocy operacji kolumnowych (tj. zamiany kolumn i dodawania do kolumny wielokrotności innej kolumny) można macierz $\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ -\text{Id} & B \end{bmatrix}$ przekształcić do macierzy $\begin{bmatrix} A & C \\ -\text{Id} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ a tą do macierzy $\begin{bmatrix} C & A \\ \mathbf{0} & -\text{Id} \end{bmatrix}$. Ile wynosi wyznacznik tej macierzy?

Exercise 9 This task is to show the alternative proof of Cauchy's theorem.

Let A, B, C be the matrices of dimension $n \times n$, where $C = AB$ and $\text{rk}(A) = \text{rk}(B) = n$.

Consider the matrix $\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ -\text{Id} & B \end{bmatrix}$. What is the determinant of the matrix?

Show that by using column operations (ie. switch columns and add a scalar multiple of another column to the column) one can convert the matrix $\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ -\text{Id} & B \end{bmatrix}$ to the matrix $\begin{bmatrix} A & C \\ -\text{Id} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ and this matrix to the $\begin{bmatrix} C & A \\ \mathbf{0} & -\text{Id} \end{bmatrix}$. What is the determinant of this matrix?

Zadanie 10

Niech $q_1, q_2, \dots, q_n$ będą dowolnymi liczbami. Macierz $(n \times n)$ Vandermonde'a V_n ma wyrazy równe $v_{ij} = q_i^{j-1}$, tj.:

$$V_n = \begin{bmatrix} 1 & q_1 & q_1^2 & \dots & q_1^{n-1} \\ 1 & q_2 & q_2^2 & \dots & q_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & q_n & q_n^2 & \dots & q_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Udowodnij, że

$$\det(V_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (q_j - q_i).$$

W szczególności pokaż, że jeśli q_i są niezerowe i parami różne, to wyznacznik ten jest niezerowy.

Exercise 10 Let $q_1, q_2, \dots, q_n$ be arbitrary numbers. The $(n \times n)$ Vandermonde matrix V_n has entries $v_{ij} = q_i^{j-1}$, ie.:

$$V_n = \begin{bmatrix} 1 & q_1 & q_1^2 & \cdots & q_1^{n-1} \\ 1 & q_2 & q_2^2 & \cdots & q_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & q_n & q_n^2 & \cdots & q_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Prove that

$$\det(V_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (q_j - q_i).$$

In particular, show that if q_i are nonzero and distinct numbers, then this determinant is nonzero.