

Algebra — Exercise 7

Zadanie 1 Pokaż, że układ równań uzyskany przez

- zamianę i -tego oraz j -tego równania
- dodanie do j -tego równania wielokrotności i -tego
- przemnożenie i -tego równania przez stałą $\alpha \neq 0$

jest równoważny wyjściowemu.

Exercise 1 Show that the system of equations obtained by

- swapping the i -th and the j -th equation
- adding a multiple of the i -th equation to the j -th equation
- multiplying the i -th equation by a constant $\alpha \neq 0$

is equivalent to the given system of equations.

Zadanie 2 Rozwiąż przy użyciu wzorów Cramera, tj. $x_i = \frac{\det(A_{x_i})}{\det(A)}$, układy równań:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 17 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Exercise 2 Solve by using Cramer's rule, ie: $x_i = \frac{\det(A_{x_i})}{\det(A)}$,

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 17 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 3 Ile rozwiązań mają poniższe układy równań (w zależności od parametru p):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2p \\ p \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} p & p & p \\ 1 & p & p \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ p \\ p \end{bmatrix}.$$

Exercise 3 How many solutions the following systems of equations have, depending on the parameter p):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2p \\ p \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} p & p & p \\ 1 & p & p \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ p \\ p \end{bmatrix}.$$

Zadanie 4 Podaj jedno rozwiązanie szczególne oraz postać rozwiązania ogólnego dla:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -8 \\ 4 & 3 & -9 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 8 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \\ 12 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -9 & 6 & 7 & 10 \\ -6 & 4 & 2 & 7 \\ -3 & 2 & -11 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 & 12 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 9 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Preferowana metoda eliminacji.

Exercise 4 Calculate one solution and write the general form of the solutions for:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -8 \\ 4 & 3 & -9 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 8 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \\ 12 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -9 & 6 & 7 & 10 \\ -6 & 4 & 2 & 7 \\ -3 & 2 & -11 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 & 12 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 9 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

The Gaussian elimination method is preferred.

Zadanie 5 Ile rozwiązań mają poniższe układy równań (w zależności od parametru λ):

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{bmatrix}.$$

Exercise 5 How many solutions the following systems of equations have (depending on the parameter λ)

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 6 Zbadaj ilość rozwiązań w zależności od parametru λ .

$$\begin{bmatrix} -6 & 8 & -5 & -1 \\ -2 & 4 & 7 & 3 \\ -3 & 5 & 4 & 2 \\ -3 & 7 & 17 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Exercise 6 Find the number of solutions depending on the parameter λ .

$$\begin{bmatrix} -6 & 8 & -5 & -1 \\ -2 & 4 & 7 & 3 \\ -3 & 5 & 4 & 2 \\ -3 & 7 & 17 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Zadanie 7 Opisz przestrzeń rozwiązań poniższych układów równań (np. poprzez podanie bazy odpowiedniej przestrzeni liniowej)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & -x_3 & = 0 \\ x_2 & -x_4 & = 0 \\ -x_1 + x_3 & -x_5 & = 0 \\ -x_2 + x_4 & -x_6 & = 0 \\ -x_3 & +x_5 & = 0 \\ -x_4 & +x_6 & = 0 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & +x_2 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 = 0 \\ x_2 & +x_3 & +x_4 = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-2} & +x_{n-1} & +x_n = 0 \\ x_{n-1} & +x_n & = 0 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & +x_2 & -2x_3 & +2x_4 & = 0 \\ 3x_1 & +5x_2 & +6x_3 & -4x_4 & = 0 \\ 4x_1 & +5x_2 & -2x_3 & +3x_4 & = 0 \\ 3x_1 & +8x_2 & +24x_3 & -19x_4 & = 0 \end{array} \right\}.$$

Exercise 7 Describe the solution space of the following systems of equations (eg. by providing the basis of the corresponding linear space)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & -x_3 & = 0 \\ x_2 & -x_4 & = 0 \\ -x_1 + x_3 & -x_5 & = 0 \\ -x_2 + x_4 & -x_6 & = 0 \\ -x_3 & +x_5 & = 0 \\ -x_4 & +x_6 & = 0 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & +x_2 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 = 0 \\ x_2 & +x_3 & +x_4 = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-2} & +x_{n-1} & +x_n = 0 \\ x_{n-1} & +x_n & = 0 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & +x_2 & -2x_3 & +2x_4 & = 0 \\ 3x_1 & +5x_2 & +6x_3 & -4x_4 & = 0 \\ 4x_1 & +5x_2 & -2x_3 & +3x_4 & = 0 \\ 3x_1 & +8x_2 & +24x_3 & -19x_4 & = 0 \end{array} \right\}.$$

Zadanie 8 Udowodnij, że jeśli $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ są różnymi wartościami własnymi macierzy M , to odpowiadające im wektory własne $v_1, v_2, \dots, v_k$ są liniowo niezależne.

Wskazówka: pokaż przez indukcję po ℓ , że v_ℓ jest liniowo niezależny od $\{v_1, \dots, v_{\ell-1}\}$.

Exercise 8 Prove that, if $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ are the eigenvalues of the matrix M , then the corresponding eigenvectors $v_1, v_2, \dots, v_k$ are linearly independent.

Hint: show by induction over ℓ that v_ℓ is linearly independent of $\{v_1, \dots, v_{\ell-1}\}$.

Zadanie 9 Pokaż, że jeśli λ jest wartością własną macierzy A to λ^k jest wartością własną A^k .

Exercise 9 Show that if λ is an eigenvalue of the matrix A then λ^k is an eigenvalue of A^k .

Zadanie 10 Znajdź wartości własne i odpowiadające im wektory własne dla podanych przekształceń liniowych:

$$L((x, y, z)) = (2x - y, 0, y + z) \quad \text{oraz} \quad L((x, y, z)) = (0, 0, y).$$

Exercise 10 Find the eigenvalues and the corresponding eigenvectors of the given linear transformations:

$$L((x, y, z)) = (2x - y, 0, y + z) \quad \text{and} \quad L((x, y, z)) = (0, 0, y) \ .$$