

Algebra — Exercise 8

Zadanie 1 Niech $A : V \rightarrow V$ będzie przekształceniem liniowym. Pokaż, że $\ker A$ oraz $\operatorname{Im} A$ są przestrzeniami niezmienniczymi A .

Exercise 1 Let $A : V \rightarrow V$ be a linear transformation. Show that $\ker A$ and $\operatorname{Im} A$ are invariant subspaces of A .

Zadanie 2 Dla wielomianu $\varphi(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^i$ możemy zdefiniować naturalnie wartość tego wielomianu na macierzy kwadratowej, jako $\varphi(M) = \sum_{i=0}^k a_i M^i$, gdzie $M^0 = \operatorname{Id}$.

Niech $M = AJA^{-1}$, gdzie J jest macierzą Jordana (tzn. na przekątnej ma klatki Jordana), zaś φ_M jej wielomianem charakterystycznym. Pokaż, że $\varphi_M(M)$ jest macierzą zerową.

(W pełnej ogólności to zadanie powinno mówić, że A, J są macierzami nad $\mathbb{C}$, ale w zasadzie nic nie zmienia to w dowodzie: wystarczy, że pokażesz to dla $\mathbb{R}$.)

Exercise 2 For a polynomial $\varphi(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^i$ we define its value on a square matrix as $\varphi(M) = \sum_{i=0}^k a_i M^i$, where $M^0 = \operatorname{Id}$.

Let $M = AJA^{-1}$, where J is a Jordan's matrix (ie, the diagonals have Jordan blocks), and φ_M be its characteristic polynomial. Show that $\varphi_M(M)$ is a null matrix.

(In general, this exercise should say that A, J are matrices over $\mathbb{C}$, but basically this changes nothing in the proof: it is enough to show for $\mathbb{R}$.)

Zadanie 3 Znajdź wartości własne, ich krotności algebraiczne i geometryczne.

$$\begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exercise 3 Find the eigenvalues, their algebraic and geometric multiples.

$$\begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 4 Znajdź wartości własne i odpowiadające wektory własne macierzy (nad $\mathbb{R}$):

$$\begin{bmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Znajdź wartości własne i odpowiadające wektory własne (nad $\mathbb{C}$):

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercise 4 Find the eigenvalues and corresponding eigenvectors of the matrix (over $\mathbb{R}$):

$$\begin{bmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Find the eigenvalues and corresponding eigenvectors of the matrix (over $\mathbb{C}$):

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 5 Pokaż, że jeśli λ^2 jest wartością własną macierzy M^2 , to M ma wartość własną λ lub $-\lambda$.

Wskazówka: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Exercise 5 Show that if λ^2 is the eigenvalue of the matrix M^2 , then the eigenvalue of M is either λ or $-\lambda$.

Hint: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Zadanie 6* (punkty nie liczą się do podstawy) Udowodnij, że dla macierzy kwadratowych A, B wielomiany charakterystyczne macierzy AB oraz BA są takie same.

Wskazówka: Pokaż tezę najpierw dla B odwracalnego. Następnie dla B będącej macierzą przekątniową, które ma na przekątnej tylko 1 lub 0. Następnie udowodnij (eliminacja Gaussa), że każda macierz M jest iloczynem odwracalnych macierzy elementarnych oraz macierzy ww. postaci.

Exercise 6 [* (points do not count towards the base)] Prove that for two square matrices A, B , the characteristic polynomial of the matrices AB and BA are the same.

Hint: First show that the proposition is true for an invertible B . Then show that for B being a diagonal matrix with only 1s and 0s on the diagonal. Then prove (using Gaussian elimination) that every matrix M is the product of the invertible elementary matrices and a diagonal matrix of the form given above.

Zadanie 7 Niech $\langle \cdot, \cdot \rangle$ będzie standardowym iloczynem skalarnym na $\mathbb{R}^n$, tj. dla wektorów $v = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T$, $u = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$

$$\langle v, u \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i .$$

Pokaż, że

$$[\langle u, v \rangle] = u^T v .$$

(zwróć uwagę, że $\langle u, v \rangle$ jest liczbą, a $u^T v$ macierzą).

Wywnioskuj z tego, że dla dowolnej macierzy M zachodzi

$$\langle u, Mv \rangle = \langle M^T u, v \rangle .$$

Exercise 7 Let $\langle \cdot, \cdot \rangle$ be a standard scalar product on $\mathbb{R}^n$, ie. for two vectors $v = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T$, $u = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$

$$\langle v, u \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i .$$

Show that

$$[\langle u, v \rangle] = u^T v .$$

(Note that $\langle u, v \rangle$ is a number, and $u^T v$ is a matrix).

Let's deduce that for any matrix M ,

$$\langle u, Mv \rangle = \langle M^T u, v \rangle .$$

Zadanie 8 Niech M będzie macierzą symetryczną (tj. $M = M^T$) wymiaru $n \times n$ a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ będzie standardowym iloczynem skalarnym na $\mathbb{R}^n$. Pokaż, że

$$\langle u, Mv \rangle = \langle Mu, v \rangle$$

(możesz skorzystać z poprzedniego zadanie).

Wywnioskuj z tego, że jeśli $\lambda \neq \lambda'$ są różnymi wartościami własnymi macierzy symetrycznej M o wektorach własnych v oraz v' , to $\langle v, v' \rangle = 0$, tj. v i v' są prostopadłe.

Exercise 8 Let M be a symmetric matrix (ie $M = M^T$) of the dimension $n \times n$, and a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ be a standard scalar product on $\mathbb{R}^n$. Show that

$$\langle u, Mv \rangle = \langle Mu, v \rangle$$

(You can use the previous exercise).

Deduce from this that if $\lambda \neq \lambda'$ are the different eigenvalues of the symmetric matrix M with the eigenvectors v and v' , $\langle v, v' \rangle = 0$, ie v and v' are perpendicular.

Zadanie 9 (Nierówność Bessela; równość Parsevala) Niech $\{e_1, \dots, e_k\}$ będą układem ortonormalnym, tj.:

- $\forall i \langle e_i, e_i \rangle = 1$;
- $\forall i \neq j \langle e_i, e_j \rangle = 0$.

(Nie zakładamy, że jest bazą).

Pokaż, że dla dowolnego wektora v :

$$\sum_{i=1}^k |\langle e_i, v \rangle|^2 \leq \|v\|^2$$

i równość dla każdego v implikuje, że $\{e_1, \dots, e_k\}$ jest bazą.

Exercise 9 (Bessel inequality, Parseval equality) Let $\{e_1, \dots, e_k\}$ be an orthonormal system, ie:

- $\forall i \langle e_i, e_i \rangle = 1$;

- $\forall i \neq j \langle e_i, e_j \rangle = 0$.

(We do not assume that it is a base).

Show that for any vector v :

$$\sum_{i=1}^k |\langle e_i, v \rangle|^2 \leq \|v\|^2$$

and the equality for all v implies that $\{e_1, \dots, e_k\}$ is a base.

Zadanie 10 Uzupełnij do bazy a następnie zortonormalizuj podane układy wektorów:

- $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2});$
- $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}).$

Exercise 10 Complete the bases and convert the given vectors to an orthonormal bases:

- $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2});$
- $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}).$

Zadanie 11 Dokonaj ortonormalizacji baz:

- $(1, 2, 2), (1, 1, -5), (3, 2, 8);$
- $(1, 1, 1), (-1, 1, -1), (2, 0, 1).$

Exercise 11 Orthonormalise the bases:

- $(1, 2, 2), (1, 1, -5), (3, 2, 8);$
- $(1, 1, 1), (-1, 1, -1), (2, 0, 1).$