

Algebra — Lista 9

Zadanie 1 Niech V będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$ a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ będzie iloczynem skalarnym na tej przestrzeni. Niech $B = b_1, \dots, b_n$ będzie bazą ortonormalną V a $F : V \rightarrow V$ rzutem prostopadłym na podprzestrzeń jednowymiarową $W \leq V$.

Pokaż, że suma kwadratów długości rzutów prostopadłych wektorów z B na W wynosi 1, tj.:

$$\sum_{i=1}^n \|Fb_i\|^2 = 1 \quad .$$

Wskazówka: Wyraż rzut przez bazę ortonormalną W .

Zadanie 2 Niech V będzie przestrzenią liniową z iloczynem skalarnym nad ciałem $\mathbb{R}$, zaś $V_1, V_2 \leq V$ jej podprzestrzeniami (z tym samym iloczynem skalarnym). Pokaż, że

$$V_1 \leq V_2 \iff V_1^\perp \geq V_2^\perp \quad ,$$

gdzie $U^\perp$ oznacza dopełnienie ortogonalne U w przestrzeni V .

Zadanie 3 Zdefiniujmy iloczyn skalarny na przestrzeni wielomianów jako

$$\langle g, h \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 g(x)h(x)dx \quad .$$

Dokonaj ortonormalizacji (dowolnej) bazy przestrzeni wielomianów stopnia nie większego niż 2.

Zrzutuj prostopadle na tą przestrzeń wielomiany x^3 oraz $x^3 - x^2 + x - 1$.

Wskazówka: Do drugiej części: to jest *rzut*. Co więcej, rzut jest przekształceniem liniowym.

Zadanie 4 Niech V : przestrzeń liniowa z iloczynem skalarnym, B : baza V , a $F : V \rightarrow V$: przekształcenie liniowe. Pokaż, że F jest izometrią wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{u,v \in B} \langle F(u), F(v) \rangle = \langle u, v \rangle \quad .$$

Tj. gdy F zachowuje iloczyn skalarny wektorów z bazy.

Zadanie 5 (Macierz Grama) Zdefiniujmy macierz Grama układu wektorów $\{v_1, \dots, v_k\}$ w przestrzeni V z iloczynem skalarnym jako

$$G(\{v_1, \dots, v_n\}) = (\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j=1,\dots,k} \quad .$$

Udowodnij, że

- $\det(G(\{v_1, \dots, v_n\}))$ jest nieujemny
- $\det(G(\{v_1, \dots, v_n\})) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\{v_1, \dots, v_n\}$ jest liniowo zależny.

Wskazówka: Co dzieje się z macierzą Grama, gdy ortonormalizujemy ten układ wektorów?

Zadanie 6 Udowodnij, że jeśli M jest macierzą ortogonalną, to $\det(M) \in \{-1, 1\}$. Wywnioskuj z tego, że jeśli F jest izometrią, to $\det F \in \{-1, 1\}$.

Zadanie 7 Niech $M = [C_1|C_2|\dots|C_n]$ będzie macierzą kwadratową a $C_1, \dots, C_n$ jej kolumnami. Pokaż, że

$$|\det(M)| \leq \prod_{i=1}^n \|C_i\| \quad ,$$

gdzie $\|\cdot\|$ to długość w standardowym iloczynie skalarnym. Pokaż też, że jeśli M jest ortogonalna, to obie strony są równe.

Wskazówka: Potraktuj kolumny M jako wektory i przeprowadź ortonormalizację. Co się dzieje ze stronami równości?

Zadanie 8 Sprawdź, czy podane poniżej macierze są dodatnio określone

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 & 3 \\ 7 & 15 & 7 & 3 \\ 3 & 7 & 11 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad .$$

Zadanie 9 Przedstaw poniższe macierze dodatnio określone w postaci $B^T B$.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Wskazówka: Dla przypomnienia: jako macierz B możesz wziąć macierz M_{EA} , gdzie E to baza standardowa, zaś A : baza ortonormalna.

Zadanie 10 Pokaż, że:

- suma dwóch macierzy dodatnio określonych jest dodatnio określona;
- macierz odwrotna do macierzy dodatnio określonej jest dodatnio określona.