

## Algebra — Exercise 9

**Zadanie 1** Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad  $\mathbb{R}$  a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  będzie iloczynem skalarnym na tej przestrzeni. Niech  $B = b_1, \dots, b_n$  będzie bazą ortonormalną  $V$  a  $F : V \rightarrow V$  rzutem prostopadłym na podprzestrzeń jednowymiarową  $W \leq V$ .

Pokaż, że suma kwadratów długości rzutów prostopadłych wektorów z  $B$  na  $W$  wynosi 1, tj.:

$$\sum_{i=1}^n \|Fb_i\|^2 = 1 \ .$$

*Wskazówka:* Wyraż rzut przez bazę ortonormalną  $W$ .

**Exercise 1** Let  $V$  be a linear space over  $\mathbb{R}$  and  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  be a scalar product in this space. Let  $B = b_1, \dots, b_n$  be an orthonormal basis of  $V$  and  $F : V \rightarrow V$  be a projection perpendicular to the one-dimensional subspace  $W \leq V$ .

Show that the sum of the squares of the lengths of the perpendicular projections of vectors from  $B$  to  $W$  is 1, ie:

$$\sum_{i=1}^n \|Fb_i\|^2 = 1 \ .$$

Hint: Express the projection through an orthonormal basis of  $W$ .

**Zadanie 2** Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową z iloczynem skalarnym nad ciałem  $\mathbb{R}$ , zaś  $V_1, V_2 \leq V$  jej podprzestrzeniami (z tym samym iloczynem skalarnym). Pokaż, że

$$V_1 \leq V_2 \iff V_1^\perp \geq V_2^\perp \ ,$$

gdzie  $U^\perp$  oznacza dopełnienie ortogonalne  $U$  w przestrzeni  $V$ .

**Exercise 2** Let  $V$  be a linear space with a scalar product over the field  $\mathbb{R}$ , and  $V_1, V_2 \leq V$  be its subspaces (with the same scalar product). Show that

$$V_1 \leq V_2 \iff V_1^\perp \geq V_2^\perp \ ,$$

Where  $U^\perp$  denotes the orthogonal complement of  $U$  in the space  $V$ .

**Zadanie 3** Zdefiniujmy iloczyn skalarny na przestrzeni wielomianów jako

$$\langle g, h \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 g(x)h(x)dx \ .$$

Dokonaj ortonormalizacji (dowolnej) bazy przestrzeni wielomianów stopnia nie większego niż 2.

Zrzutuj prostopadłe na tą przestrzeń wielomiany  $x^3$  oraz  $x^3 - x^2 + x - 1$ .

*Wskazówka:* Do drugiej części: to jest *rzut*. Co więcej, rzut jest przekształceniem liniowym.

**Exercise 3** Let's define a scalar product on the polynomial space as

$$\langle g, h \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 g(x)h(x)dx \ .$$

Orthonormalize (any) basis of the space of polynomials with degree no greater than 2.

Project the polynomials  $x^3$  and  $x^3 - x^2 + x - 1$  perpendicularly onto this space.

Hint: For the second part: this is a *projection*. Also, the projection is a linear transformation.

**Zadanie 4** Niech  $V$ : przestrzeń liniowa z iloczynem skalarnym,  $B$ : baza  $V$ , a  $F : V \rightarrow V$ : przekształcenie liniowe. Pokaż, że  $F$  jest izometrią wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{u,v \in B} \langle F(u), F(v) \rangle = \langle u, v \rangle \ .$$

Tj. gdy  $F$  zachowuje iloczyn skalarny wektorów z bazy.

**Exercise 4** Let  $V$ : linear space with scalar product,  $B$ : basis of  $V$ , and  $F : V \rightarrow V$ : linear transformation. Show that  $F$  is an isometry if and only if

$$\forall_{u,v \in B} \langle F(u), F(v) \rangle = \langle u, v \rangle \ .$$

ie., when  $F$  retains the scalar product of the vectors from the basis.

**Zadanie 5 (Macierz Grama)** Zdefiniujmy macierz Grama układu wektorów  $\{v_1, \dots, v_k\}$  w przestrzeni  $V$  z iloczynem skalarnym jako

$$G(\{v_1, \dots, v_n\}) = (\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j=1, \dots, k}.$$

Udowodnij, że

- $\det(G(\{v_1, \dots, v_n\}))$  jest nieujemny
- $\det(G(\{v_1, \dots, v_n\})) = 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\{v_1, \dots, v_n\}$  jest liniowo zależny.

*Wskazówka:* Co dzieje się z macierzą Grama, gdy ortonormalizujemy ten układ wektorów?

**Exercise 5** [(Gramian matrix)] Let's define a Gram matrix of vectors  $\{v_1, \dots, v_k\}$  in the space  $V$  with scalar product as

$$G(\{v_1, \dots, v_n\}) = (\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j=1, \dots, k}.$$

Prove that

- $\det(G(\{v_1, \dots, v_n\}))$  is non-negative
- $\det(G(\{v_1, \dots, v_n\})) = 0$  if and only if  $\{v_1, \dots, v_n\}$  is linearly dependent.

Hint: What happens to the Gram's matrix when we orthogonalize this set of vectors?

**Zadanie 6** Udowodnij, że jeśli  $M$  jest macierzą ortogonalną, to  $\det(M) \in \{-1, 1\}$ . Wywnioskuj z tego, że jeśli  $F$  jest izometrią, to  $\det F \in \{-1, 1\}$ .

**Exercise 6** Prove that if  $M$  is an orthogonal matrix, then  $\det(M) \in \{-1, 1\}$ . Let's deduce from this that if  $F$  is an isometry,  $\det F \in \{-1, 1\}$ .

**Zadanie 7** Niech  $M = [C_1|C_2|\dots|C_n]$  będzie macierzą kwadratową a  $C_1, \dots, C_n$  jej kolumnami. Pokaż, że

$$|\det(M)| \leq \sqrt{\prod_{i=1}^n \|C_i\|^2},$$

gdzie  $\|\cdot\|$  to długość w standardowym iloczynie skalarnym. Pokaż też, że jeśli  $M$  jest ortogonalna, to obie strony są równe.

*Wskazówka:* Potraktuj kolumny  $M$  jako wektory i przeprowadź ortonormalizację. Co się dzieje ze stronami równości?

**Exercise 7** Let  $M = [C_1|C_2|\dots|C_n]$  be a square matrix and  $C_1, \dots, C_n$  be its columns. Show that

$$|\det(M)| \leq \sqrt{\prod_{i=1}^n \|C_i\|^2},$$

Where  $\|\cdot\|$  is the length in the standard scalar product. Show that if  $M$  is orthogonal, then both sides are equal.

Hint: Treat the columns of  $M$  as vectors and perform an orthonormalization. What happens to the sides of the equality?

**Zadanie 8** Sprawdź, czy podane poniżej macierze są dodatnio określone

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 & 3 \\ 7 & 15 & 7 & 3 \\ 3 & 7 & 11 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Exercise 8** Verify if the following matrices are positive definite.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 & 3 \\ 7 & 15 & 7 & 3 \\ 3 & 7 & 11 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Zadanie 9** Przedstaw poniższe macierze dodatnio określone w postaci  $B^T B$ .

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

*Wskazówka:* Dla przypomnienia: jako macierz  $B$  możesz wziąć macierz  $M_{EA}$ , gdzie  $E$  to baza standardowa, zaś  $A$ : baza ortonormalna.

**Exercise 9** Write the following positive definite matrices in the form  $B^T B$ .

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Hint: You can take the matrix  $M_{EA}$ , where  $E$  is the standard base and  $A$ : an orthonormal base.

**Zadanie 10** Pokaż, że:

- suma dwóch macierzy dodatnio określonych jest dodatnio określona;
- macierz odwrotna do macierzy dodatnio określonej jest dodatnio określona.

**Exercise 10** Show that:

- The sum of two positive definite matrices is positive definite;
- An inverse of a positive definite matrix is positive definite.