Algebra 2018/19 — Egzamin końcowy

Czas: 165 minut.

Liczba zadań: 6.

Każde zadanie należy oddać na osobnej, podpisanej nrem indeksu kartce. W przypadku zadań rachunkowych rozwiązanie powinno zawierać opis dokonywanych operacji oraz kroki pośrednie obliczeń; *zadanie nie spełniające tego warunku mogą nie być sprawdzane.* W przypadku dowodu rozwiązanie powinno być czytelną wypowiedzią, a nie jedynie zbiorem symbolicznych przekształceń. Podzadania za 2 punkty nie wymagają podania dowodu, lecz jedynie sformułowania odpowiednich definicji i twierdzeń.

Zadanie 1.

[2 punkty] Co to jest macierz Grama iloczynu skalarnego; co umiesz powiedzieć o jej wyznaczniku?
[2 punkty] Co to znaczy, że macierz jest dodanio określona? Jakie znasz kryteria (alternatywne charakteryzacje) dodatniej określoności?
[6 punktów] Dokonaj ortonormalizacji podanego układu wektorów z przestrzeni $\mathbb{R}^4$ (ze standardowym iloczynem skalarnym), następnie uzupełnij go do bazy ortonormalnej.

$$(2, 0, -1, 2)^T, (0, 0, 1, 2)^T, (1, 1, 0, 2)^T \ .$$

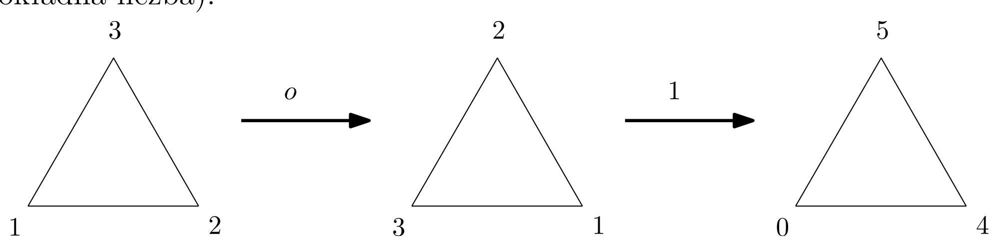
Wskazówka: Zamiana kolejności wektorów na własną odpowiedzialność.

Zadanie 2.

[2 punkty] Jak zdefiniowane są warstwy podgrupy H grupy G; co umiesz powiedzieć o różnych warstwach H?
[2 punkty] Co to znaczy, że podgrupa jest normalna i co umiesz powiedzieć o mnożeniu jej warstw?
[6 punktów] Niech G będzie grupą, zaś $h \in G$ elementem rzędu 2. Pokaż, że podgrupa $H = \langle h \rangle$ generowana przez h jest podgrupą normalną G wtedy i tylko wtedy, gdy $gh = hg$ dla każdego elementu $g \in G$.

Zadanie 3.

[2 punkty] Czym są orbita i stabilizator?
[2 punkty] Co umiesz powiedzieć o zależności pomiędzy mocami orbity i stabilizatora ustalonego elementu?
[6 punktów] Rozpatrzmy kolorowanie trójkąta równobocznego, w którym każdy wierzchołek możemy pokolorować na jeden z sześciu kolorów $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Na takich pokolorowaniach działamy grupą $\mathbb{Z}_2$: $1 \in \mathbb{Z}_2$ zamienia każdy kolor c na $c + 3 \bmod 6$. Np. kolorowanie $(1, 2, 3)$ zostanie zamienione na kolorowanie $(4, 5, 0)$. Działanie grupy obrotów i symetrii trójkąta równobocznego D_3 na takim kolorowaniu jest zdefiniowane naturalnie. Działanie produktu kartezjańskiego $D_3 \times \mathbb{Z}_2$ jst zdefiniowane tak, że z pary $(x, y) \in D_3 \times \mathbb{Z}_2$ najpierw działa x a potem y, patrz przykład poniżej. Policz liczbę orbit działania $D_3 \times \mathbb{Z}_2$ na zbiorze takich kolorowań (wystarczy wzór, nie jest potrzebna dokładna liczba).



Na rysunku powyżej kolejno: kolorowania trójkąta kolorami $1, 2, 3$ oraz efekty działania elementu $(o, 1)$, gdzie o jest obrotem w lewo: najpierw obracamy w lewo a następnie przekolorowujemy.

verte ⟶

Zadanie 4.

[2 punkty] Co to znaczy, że wielomian $f \in \mathbb{F}[x]$ o współczynnikach z ciała $\mathbb{F}$, jest nierozkładalny?
[2 punkty] Co umiesz powiedzieć o odtwarzaniu wielomianów (o współczynnikach z ciała $\mathbb{F}$) na podstawie wartości waluacji tego wielomianu w różnych punktach (interpolacja wielomianów)?
[6 punktów] Rozważmy ciało $\mathbb{F}$ i pierścień wielomianów $\mathbb{F}[x]$ o współczynnikach z tego ciała. Niech $f, g \in \mathbb{F}[x]$ będą wielomianami z tego pierścienia, zaś $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{F}[x]$ wielomianami nierozkładalnymi, przy czym:

$$f = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$
$$g = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$$

dla pewnych liczb naturalnych $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_k \geq 0$. Niech $\gamma_i = \min(\alpha_i, \beta_i)$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$. Udowodnij, że

$$\mathrm{nwd}(f, g) = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \cdots p_k^{\gamma_k} \quad .$$

Zadanie 5.

[2 punkty] Jak jest zdefiniowany znak permutacji, jakie twierdzenia pozwalają go efektywnie wyliczać?
[2 punkty] Jakie permutacje da się przedstawić jako iloczyn transpozycji, a jakie jako iloczyn cykli trzyelementowych?
[6 punktów] Dla podanej poniżej permutacji σ określ: Jaki jest rząd σ? Rozłóż σ na cykle rozłączne. Czy σ jest permutacją parzystą? Podaj permutację odwrotną σ^{-1} i wykonaj dla niej te same polecenia.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 7 & 5 & 6 & 11 & 9 & 12 & 1 & 17 & 14 & 13 & 4 & 10 & 16 & 18 & 8 & 3 & 15 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

Zadanie 6.

[2 punkty] Czym dla pierścienia z jednością R jest R^*? Jakie ma własności?
[2 punkty] Jak wyliczyć funkcję Eulera φ dla n (tj. $\varphi(n)$), jeśli znamy rozkład n na czynniki pierwsze?
[6 punktów] Niech $p_1, \ldots, p_k$ będą różnymi liczbami pierwszymi, niech $n = p_1 \cdots p_k$. Udowodnij, że równanie kwadratowe, tj. postaci $ax^2 + bx + c = 0$ dla $a, b, c \in \mathbb{Z}_n$, ma najwyżej 2^k rozwiązań w pierścieniu $\mathbb{Z}_n$.

Pokaż też, że jeśli $2 \nmid n$ to równanie $x^2 = 4$ ma dokładnie tyle rozwiązań w $\mathbb{Z}_n$ dla n zdefiniowanego jak wyżej.