

REPETYTORIUM Z MATEMATYKI DYSKRETNEJ

LISTA 1

Pierwsza lista. Nie jestem jeszcze pewien, jak będziemy te zadania rozwiązywać.

Zadanie 1. Rzucamy symetryczną monetą aż do czasu pojawienia się pierwszego orła. Określ przestrzeń zdarzeń probabilistycznych, ich prawdopodobieństwo. Zastanów się, jaka jest szansa, że będziemy rzucać w nieskończoność. Jak jest szansa, że liczba rzutów będzie podzielna przez 2 (3, m)?

Zadanie 2. Jaka jest szansa uzyskania “do ręki” w pokerze poszczególnych figur pokerowych (gramy przy użyciu 52 kart)?

Zadanie 3. Rzucamy symetryczną monetą 2007 razy. Jaka jest szansa, że wylosujemy nieparzystą ilość orłów? A jeśli rzucamy 2006 razy?

Zadanie 4. Udowodnij, że

$$\mathbb{P}[A \cap B] \geq \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - 1.$$

Zadanie 5. Znajdź przykład zdarzeń A, B, C , które nie są niezależne, ale

$$\mathbb{P}[A \cap B \cap C] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B] \cdot \mathbb{P}[C].$$

Zadanie 6. Wrzucamy n kulek losowo do n komórek. Jaka jest szansa, że dokładnie jedna komórka jest pusta?

Zadanie 7. Wybieramy losowo (z równym prawdopodobieństwem) ciąg bitowy długości n . Niech A oznacza zdarzenie, iż w danym ciągu jest najwyżej jeden bit równy 1 a B oznacza zdarzenie, że w danym ciągu jest zarówno bit równy 1 jak i bit równy 0. Czy A oraz B są niezależne? Spróbuj odpowiedzieć na to pytanie “intuicyjnie” a dopiero potem wykonaj odpowiednie rachunki.

Zadanie 8. Niech A będzie zdarzeniem losowym. Definiujemy

$$A^1 := A \quad \text{oraz} \quad A^{-1} := A^c$$

Gdzie A^c oznacza dopełnienie A . Niech $A_1, \dots, A_n$ będą zdarzeniami. Pokaż, że następujące warunki są równoważne:

- (1) $A_1, \dots, A_n$ są niezależne,
- (2) dla każdego ciągu $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ zdarzenia $A_1^{\epsilon_1}, \dots, A_n^{\epsilon_n}$ są niezależne,
- (3) dla każdego ciągu $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ zachodzi

$$\mathbb{P}[A_1^{\epsilon_1} \cap \dots \cap A_n^{\epsilon_n}] = \mathbb{P}[A_1^{\epsilon_1}] \cdot \dots \cdot \mathbb{P}[A_n^{\epsilon_n}].$$

Zadanie 9. Pokaż, że wylosowanie ze standardowej talii 52 kart asa oraz wylosowanie karty czerwonej (tj. kier lub karo) są zdarzeniami niezależnymi.

Zadanie 10. Niech $A \cap B = \emptyset$ oraz A, B są niezależne. Pokaż, że $\mathbb{P}[A] = 1$ lub $\mathbb{P}[B] = 1$.