

KOŁOKWIUM 1

Zadanie 1. Student jada w ciągu miesiąca (30 dni) nie więcej niż 50 posiłków (tj. posiłki ≤ 50), przy czym każdego dnia zjada posiłek. Pokaż, że istnieje ciąg kolejnych dni, w których student zjada w sumie dokładnie 10 posiłków.

Zadanie 2. Oblicz

$$\sum_{k=1}^n \lfloor \sqrt{k} \rfloor$$

jako funkcję n .

Wskazówka:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n + \frac{1}{2})(n + 1)}{3}.$$

Zadanie 3. Mówimy, że w permutacji $\pi = (\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n))$ liczba k jest wzrostem, jeśli $\pi(k) > \pi(k-1)$, w szczególności $\pi(1)$ nigdy nie jest wzrostem. Niech $W_{n,k}$ oznacza ilość permutacji n -elementowych mających k wzrostów. Udowodnij, zależność rekurencyjną

$$W_{n,k} = (k+1)W_{n-1,k} + (n-k)W_{n-1,k-1}.$$

Zadanie 4. Znajdź postać zwartą funkcji tworzącej ciągu (s_n) , gdzie

$$s_0 = 0, s_1 = \alpha \in (0, \frac{1}{4}) \quad s_n = \sum_{k \geq 0} \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, \dots, n-1\} \\ i_1 + \dots + i_k = n-1}} s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_k}.$$

Np. $s_4 = s_3 + s_2 s_1 + s_1 s_2 + s_1 s_1 s_1$

Wskazówka: spróbuj najpierw dla $k \leq 4$, potem $k \leq 4$ itd.