

Matematyka dyskretna – zadania na ćwiczenia 2

Licencjat dzienny. Prowadzący: Maciej M. Sysło

1. Przedstaw $\text{NWD}(448, 721)$ w postaci $448x + 721y$, czyli znajdź odpowiednie wartości liczb całkowitych x i y .

2. (Zadanie domowe, rozwiązanie proszę przynieść na ćwiczenia.) Zapisz w wybranym przez siebie języku programowania i sprawdź na komputerze algorytm, który dla trzech danych liczb naturalnych a , b i k (gdzie liczba $k = \text{NWD}(a, b)$) znajduje liczby całkowite x i y spełniające równanie: $ax + by = k$. Określ złożoność swojego algorytmu. Rozważ modyfikację podanego algorytmu, w której liczba k jest podzielna przez $\text{NWD}(a, b)$.

3. a. Wykaż, że $F_{2n} = F_n(F_n + 2F_{n-1})$

b. Podaj podobną zależność dla F_{2n+1} zawierającą liczby Fibonacciego o mniejszych wskaźnikach.

4. Korzystając z wyników poprzedniego zadania, zaproponuj algorytm wyznaczania wartości F_n . Oblicz liczbę wykonanych mnożeń i dodawań w zależności od n (patrz [4]).

5. Wykaż, że dwie kolejne liczby Fibonacciego są względnie pierwsze.

Wskazówka. Skorzystaj z algorytmu Euklidesa.

6. Udowodnij indukcyjnie, że $\text{NWD}(F_m, F_n) = F_{\text{NWD}(m, n)}$.

7*. Jaki związek z liczbami Fibonacciego ma rozwiązanie następującego zadania: W skończonym ciągu dodatnich liczb całkowitych, nie większych niż miliard (to może być 10 miliardów, albo inna liczba), reprezentujących długości odcinków, należy znaleźć trzy takie liczby, że z odpowiadających im odcinków można zbudować trójkąt (źródło: *Materiały II Olimpiady Informatycznej*, 1994/1995).

8. Udowodnij, że jeśli $(m_1, m_2, \dots)_p$ i $(n_1, n_2, \dots)_p$ są reprezentacjami liczb naturalnych m i n względem układu kolejnych liczb pierwszych, to:

a. $k = \text{NWD}(m, n)$ iff $k_i = \min\{m_i, n_i\}$ dla każdego $i = 1, 2, \dots$

b. $k = \text{NWW}(m, n)$ iff $k_i = \max\{m_i, n_i\}$ dla każdego $i = 1, 2, \dots$

gdzie $(k_1, k_2, \dots)_p$ jest rozkładem liczby k . Korzystając z powyższych równości pokaż, że $mn = \text{NWD}(m, n)\text{NWW}(m, n)$.

9. Wykaż, że jeśli $2^n - 1$ jest liczbą pierwszą, to n jest liczbą pierwszą (por. liczby Mersenne'a).

10. Wykaż, że jeśli $a^n - 1$ jest liczbą pierwszą, to $a = 2$ (por. liczby Mersenne'a).

11. Wykaż, że jeśli $2^n + 1$ jest liczbą pierwszą, to n jest potęgą liczby 2 (por. liczby Fermata).

Zalecana literatura do wykładu, repetytorium i ćwiczeń:

1. R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik, *Matematyka konkretna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1996.

2. K.A. Ross, C.R.B. Wright, *Matematyka dyskretna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1996.

3. M.M. Sysło, *Algorytmy*, WSiP, Warszawa 1997.

4. M.M. Sysło, *Piramidy, szyszki i inne konstrukcje algorytmiczne*, WSiP, Warszawa 1998.