

Matematyka dyskretna – zadania na ćwiczenia 3

Licencjat dzienny, Prowadzący: Maciej M. Sysło

0. Udowodnij, że dla $k > 0$, liczba $2^k (2^{k+1} - 1)$ jest doskonała, jeśli $(2^{k+1} - 1)$ jest liczbą pierwszą.
1. Wykaż, że każdy wielościan wypukły zawiera co najmniej dwie ściany o tej samej liczbie krawędzi.
2. Dany jest ciąg liczb naturalnych $a_1, a_2, \dots, a_n$. Pokaż, że istnieją takie i oraz $j, i \leq j$, że suma $a_i + a_{i+1} + \dots + a_j$ jest podzielna przez n .
3. Pokaż, że wśród dziewięciu nieujemnych liczb rzeczywistych, których suma wynosi 90, istnieją trzy, których suma wynosi przynajmniej 30 i cztery liczby, których suma wynosi przynajmniej 40.
4. Wśród liczb naturalnych 1, 2, ..., 800, ile jest takich, które nie są podzielne przez 7, ale są podzielne przez 6 lub przez 8.
5. Korzystając z zasady włączania-wyłączania oblicz, ile jest sposobów ustawienia liter $a, a, a, a, b, b, b, c, c$ w taki sposób, aby żadne wszystkie takie same litery nie tworzyły jednego bloku.
6. **Nieporządkiem** nazywa się taką permutację elementów, w której żaden element nie znajduje się na swoim miejscu. Niech d_n oznacza liczbę nieporządków utworzonych z n kolejnych liczb naturalnych. Wyprowadź wzór na d_n stosując zasadę włączania i wyłączania.
7. Oblicz liczby całkowite x i y spełniające równość $333x + 1234y = 1$. Ile wynosi 333^{-1} w Z_{1234} .
8. Oblicz $-69^{-1} \bmod 1313$.
9. Wykaż prawdziwość następujących zależności (wszystkie liczby m, x, y, z są całkowite):
- (a) $xz \equiv yz \pmod{mz} \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{m}$, dla $z \neq 0$.
 - (b) $xz \equiv yz \pmod{m} \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{m/\text{NWD}(z, m)}$.
 - (c) $x \equiv y \pmod{mz} \Rightarrow x \equiv y \pmod{m}$.
10. Określ liczbę podzielną przez 7, która leży najbliżej liczby $10^{100\,000}$.
11. Opisz postać liczb podzielnych przez 13, które leżą najbliżej liczby utworzonej z jedynek i miliona zer. A może ta liczba jest podzielna przez 13?
12. Posługując się arytmetyką modularną z trzema modułami: 5, 7 i 9 oblicz wartości następujących wyrażeń: $100+4*39, 16*16, 2^7$.
13. Stosując metodę podstawiania rozwiąż następujące zależności rekurencyjne:
- (a) $t_n = t_{n-1} + 3^n$ dla $n > 1$ i $t_1 = 3$.
 - (b) $h_n = h_{n-1} + (-1)^{n+1}n$ dla $n > 1$ i $h_1 = 1$.
14. Stosując metodę podstawiania rozwiąż zależność rekurencyjną, dotyczącą liczby porównań w metodzie porządkowania przez scalanie, dla przypadku, gdy liczba porządkowanych elementów n jest potęgą liczby 2.
15. Niech

$f(n) = \sum_{k=1}^n \lceil \log_2 k \rceil$ Wykaż, że $f(n) = f(\lceil n/2 \rceil) + f(\lfloor n/2 \rfloor) + (n-1)$ dla $n > 0$. Wyprowadź jawną postać funkcji $f(n)$, czyli taką, która nie zawiera znaku sumowania.

Zalecana literatura do wykładu, repetytorium i ćwiczeń:

1. R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik, *Matematyka konkretna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1996.
2. W. Lipski, Jr., *Kombinatoryka dla programistów*, WNT, Warszawa 1992.
3. K.A. Ross, C.R.B. Wright, *Matematyka dyskretna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1996.
4. M.M. Sysło, *Piramidy, szyszki i inne konstrukcje algorytmiczne*, WSiP, Warszawa 1998.