

Matematyka dyskretna – zadania na ćwiczenia 4

Licencjat dzienny. Prowadzący: Maciej M. Sysło

1. Ile jest wyrazów złożonych z n liter należących do 25-literowego alfabetu łacińskiego, zawierających parzysta liczbę liter a ?
2. Wyprowadź zależność rekurencyjną dla liczby nieporządków: $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$. Jakie należy przyjąć warunki początkowe dla tej zależności?
3. Na płaszczyźnie danych jest n okręgów. Jaka jest maksymalna liczba obszarów, na które dzielą one płaszczyznę? Wyprowadź rozwiązanie za pomocą odpowiedniej zależności rekurencyjnej.
4. Niech $a_n = n \bmod 3$. Jaką zależność rekurencyjną spełnia a_n ? Wyznacz z tej zależności wartość a_n .
5. W podobny sposób, jak w zadaniu 4, ułóż i rozwiąż zależność, jaką spełnia $\lfloor n/3 \rfloor$.
6. Znajdź ogólną postać rozwiązań następujących równań rekurencyjnych za pomocą anihilatorów i rozwiąż jedno z równań do końca:
 - (a) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 3^n - 1$, gdy $a_0 = a_1 = 0$.
 - (b) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n2^{n+1}$, gdy $a_0 = a_1 = 1$.
 - (c) $a_{n+2} = 2^{n+1} - a_{n+1} - a_n$, gdy $a_0 = a_1 = 1$.
7. Niech $A(x)$ będzie funkcja tworząca ciąg a_n . Podaj postać funkcji tworzących dla następujących ciągów:
 - (a) $b_n = na_n$.
 - (b) $c_n = a_n/n$.
 - (c) $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$.
8. Wyznacz funkcje tworzące ciągów:
 - (a) $a_n = n^2$
 - (b) $a_n = n^3$
 - (c) $a_n = \binom{n+k}{k}$
9. Wyznacz funkcję tworzącą ciągu określonego rekurencyjnie:
$$a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n + 1, \quad \text{gdy } a_0 = a_1 = a_2 = 1.$$
10. Podaj postać funkcji tworzącej dla liczby podziałów liczby naturalnej n (czyli rozkładów liczby n na sumę składników naturalnych, gdy rozkładów różniących się kolejnością nie uważamy za różne):
 - a. na dowolne składniki,
 - b. na różne składniki nieparzyste,
 - c. na składniki mniejsze od m ,
 - d. na różne potęgi liczby 2.
11. Udowodnij, że liczba sposobów, w jaki można podzielić $(n+2)$ -ką wypukłą na płaszczyźnie na rozłączne trójkąty za pomocą $n-1$ przekątnych, które nie przecinają się wewnątrz tego wielokąta, jest równa liczbie Catalana.
12. Określ liczbę płaskich (czyli z wyróżnionym lewym i prawym poddrzewem) drzew binarnych, zawierających n wierzchołków wewnętrznych.
13. Ile nie krzyżujących się uścisków dłoni może wykonać jednocześnie n par osób siedzących za okrągłym stołem?

Zalecana literatura do wykładu, repetytorium i ćwiczeń:

1. R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik, *Matematyka konkretna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1996.
2. W. Lipski, Jr., *Kombinatoryka dla programistów*, WNT, Warszawa 1992.
3. K.A. Ross, C.R.B. Wright, *Matematyka dyskretna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1996.