

Matematyka dyskretna – zadania na ćwiczenia 5

Licencjat dzienny, Prowadzący: Maciej M. Sysło

1. Rozwiąż zależność rekurencyjną podana na wykładzie, która wynika z ogólnego schematu metody dziel i zwyciężaj przy założeniu, że funkcja $h(n) = c$.

2. Wykaż, że iloczyn dowolnych kolejnych k liczb naturalnych jest podzielny przez $k!$

3. Wykaż tożsamość absorbcyjną:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}, \quad k \neq 0$$

4. Podaj interpretację następującej tożsamości w terminach zbiorów:

$$\binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} \binom{n-m}{n-k}$$

5. Wykaż prawdziwość tożsamości Cauchy'ego:

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{s=0}^r \binom{m}{s} \binom{n}{r-s}$$

6. Pokaż, że liczba przedstawień liczby naturalnej n w postaci sumy k liczb naturalnych (różnych od zera) wynosi:

$$\binom{n-1}{k-1}$$

jeśli przedstawienia nie różniące się kolejnością składniki uważamy za różne. Ile jest przedstawień liczby n w postaci sumy dowolnej ilości liczb naturalnych?

7. Udowodnij, że liczba permutacji złożonych z n elementów, zawierających λ_i cykli długości i w rozbiciu na cykle, jest równa:

$$\frac{n!}{1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} 3^{\lambda_3} \dots n^{\lambda_n} \lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n!}$$

8. Oznaczmy przez D_n poset dzielników liczby n z relacją podzielności. Narysuj diagramy Hassego posetów D_{72} i D_{30} .

9. Podaj warunek konieczny i dostateczny na n , aby poset D_n był algebrą Boole'a.

10. Dla alfabetu Σ , niech dla $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ zachodzi $w_1 < w_2$, gdy istnieją $w, w' \in \Sigma^*$ spełniające $w_2 = ww_1w'$. Czy tak określona relacja jest częściowym porządkiem na Σ^* ? Czy określa ona również kratę? A jak zmienia się odpowiedzi, jeśli przyjmujemy, że $w, w' \in \Sigma$?

Zalecana literatura do wykładu i ćwiczeń

1. R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik, *Matematyka konkretna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1996.
2. W. Lipski, Jr., *Kombinatoryka dla programistów*, WNT, Warszawa 1992.
3. K.A. Ross, C.R.B. Wright, *Matematyka dyskretna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1996.
4. M.M. Sysło, *Algorytmy*, WSiP, Warszawa 1997.