

Matematyka dyskretna – zadania na ćwiczenia 6

Licencjat dzienny. Prowadzący: Maciej M. Sysło

1. Przekonaj się, że z dokładnością do izomorfizmu, istnieje 11 grafów z czterema wierzchołkami.
2. Niech Q_k oznacza graf k -wymiarowej kostki, tzn. zbiór wierzchołków tego grafu tworzą wszystkie k -elementowe ciągi zer i jedynek i dwa wierzchołki są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im ciągi różnią się dokładnie jedną współrzędną. Oblicz, ile wierzchołków i krawędzi ma graf Q_k . Wykaż, że jest to graf dwudzielny.
3. Problem izomorfizmu dwóch grafów jest trudny. Załóżmy natomiast, że w komputerze są dane dwa grafy G i H , określone na tym samym zbiorze wierzchołków $V(G) = V(H) = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Podaj algorytm sprawdzający w czasie $O(m + n)$, czy te grafy są identyczne. Jaki jest związek tego problemu z problemem izomorfizmu? Podaj algorytm sprawdzający, czy dwa grafy są izomorficzne, korzystając z algorytmu podanego w tym zadaniu. Jaka jest jego złożoność?
4. Udowodnij, że graf G jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej dwa grafy z rodziny $\{G_v: v \in V\}$ są spójne, gdzie G_v jest grafem powstałym z G przez usunięcie wierzchołka v i incydentnych z nim krawędzi.
5. Udowodnij, że w grafie spójnym każde dwie najdłuższe co do długości drogi mają wspólny wierzchołek.
6. Wykaż, że przynajmniej jeden z grafów G i $\bar{G}$ ($\bar{G}$ jest dopełnieniem grafu G) jest spójny.
7. Rozważ reprezentacje grafu G :
 - macierzową,
 - tablicową (w obu wersjach podanych na wykładzie),
 - listową.

Dla każdej z tych reprezentacji, określ złożoność wykonania na grafie G następujących operacji:

- przeglądaj wszystkie wierzchołki sąsiednie z ustalonego wierzchołka,
- przeglądaj wszystkie krawędzie grafu,
- sprawdź, czy krawędź $\{i, j\}$ należy do grafu G ,
- usuń z grafu G krawędź $\{i, j\}$,
- wstaw do grafu G krawędź $\{i, j\}$.

Przeprowadź podobne rozważania dla digrafów.

8. Niech $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ będzie ciągiem stopni wierzchołków grafu. Podaj algorytm porządkowania ciągu $\mathbf{d}$ działający w czasie $O(n)$.

9. Digraf D jest dany w postaci macierzy sąsiedztwa. Wykaż, że sprawdzenie, czy D zawiera **źródło**, czyli wierzchołek, z którego wychodzą łuki do wszystkich pozostałych wierzchołków, ale nie wchodzi do niego żaden łuk, może być wykonane w czasie liniowym względem liczby wierzchołków w D . Zapisz swój algorytm w języku programowania i określ dokładnie jego złożoność obliczeniową, jako funkcję zmiennej liczby wierzchołków w digrafie. (Patrz zadanie znajdowania idola w [2]).

10. **Topologiczne porządkowanie wierzchołków acyklicznego digrafu.** Niech D będzie digrafem acyklicznym, tzn. D nie zawiera cykli skierowanych. Podaj algorytm, który w czasie $O(m+n)$ porządkuje wierzchołki digrafu w taki sposób, że po uporządkowaniu, jeśli (i, j) jest łukiem w D , to $i < j$.

Jaki jest związek grafów acyklicznych i topologicznego porządkowania ich wierzchołków z posetami?

Zalecana literatura do wykładu i ćwiczeń:

1. K.A. Ross, C.R.B. Wright, *Matematyka dyskretna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1996.
2. M.M. Sysło, *Algorytmy*, WSiP, Warszawa 1998.
3. M.M. Sysło, N. Deo, J.S. Kowalik, *Algorytmy optymalizacji dyskretnej z programami w języku Pascal*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1999 (wyd. 3).
4. R.J. Wilson, *Wprowadzenie do teorii grafów*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1999.