Matematyka dyskretna, II rok informatyki,
luty 2000, termin: 1, część: 1, czas: 120 min.

Zadanie 1
Rozwiąż zależność rekurencyjną:

$$a_0 = a_1 = 0, a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2} + 1}{2}.$$

Zadanie 2
Pokaż, że

$$F_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots,$$

gdzie F_n jest n-tą liczbą Fibonacciego.

Zadanie 3
Oznaczmy przez P_n iloczyn n początkowych silni, $\prod_{k=1}^{n} k!$. Pokaż, że dla wszystkich liczb całkowitych dodatnich

$$P_n^4 | P_{2n}$$

Zadanie 4
Pokaż, że

$$\begin{aligned}
\max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \\
a_1 + a_2 + \cdots + a_n - \\
- \min\{a_1, a_2\} - \min\{a_1, a_3\} - \cdots - \min\{a_{n-1}, a_n\} + \\
+ \min\{a_1, a_2, a_3\} + \min\{a_1, a_2, a_4\} + \cdots \\
\cdots \\
\pm \min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.
\end{aligned}$$

Powyższa równość jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych, ale rozwiązanie tylko dla liczb naturalnych też będzie punktowane.

Powodzenia !

Matematyka dyskretna, II rok informatyki,
luty 2000, termin: 1, część: 2, czas: 120 min.

Zadanie 1
Na płytce obwodu drukowanego można umieścić dowolny obwód będący grafem płaskim. Połączenia obwodów nie będących grafami planarnymi trzeba umieszczać na kilku płytkach. W terminach grafowych oznacza to rozbicie zbioru krawędzi E grafu G na podzbiory $E_1, E_2, \ldots, E_t$ takie, że grafy $G_i = (V, E_i)$ są planarne. Najmniejszą liczbę t takich podzbiorów nazywamy *grubością* grafu G i oznaczamy $t(G)$. Pokaź, że

$$t(G) \geq \left\lceil \frac{m}{3n-6} \right\rceil$$

Zadanie 2
Korzystając z twierdzenia Cayley'a pokaź, że liczba różnych n-wierzchołkowych drzew z krawędziami poetykietowanymi liczbami $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ wynosi $n^{n-3} (n \geq 3)$.

Zadanie 3
Rozpatrujemy problem komiwojaźera, który ma odwiedzić n miast zawartych w kwadracie o boku k i wrócić do miasta startu pokonując jak najkrótszą drogę.

- Dzieląc kwadrat na m wąskich pasków pokaź, że można wytyczyć trasę komiwojaźera o długości niewiększej, niż $k(m + n/m + 1 + \sqrt{2})$. Jakie należy dobrać m, aby droga ta była $\sim 2k\sqrt{n}$.
- Pokaź takie rozłoźenie miast, dla którego długość najkrótszej drogi komiwojaźera wynosi co najmniej $k\sqrt{n}$.

Zadanie 4
Pokryciem wierzchołkowym grafu nazywamy taki zbiór wierzchołków, źe każda krawęd"x grafu ma jeden ze swych końców w tym zbiorze. Sprowad"x poprzez wielomianową transformację problem istnienia w grafie kliki rozmiaru k do problemu istnienia w grafie pokrycia wierzchołkowego rozmiaru l.

Powodzenia !