Egzamin z matematyki dyskretnej

luty 2001, pierwszy termin, część A, czas: 120 min.

Zadanie 1

Niech $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s}$. Pokaż, że dla dowolnego $a : a \perp n$ zachodzi następujący fakt będący uogólnieniem twierdzenia Eulera:

$$a^{\varphi'(n)} \equiv 1 \bmod n$$

gdzie $\varphi'(n) = \mathrm{lcm}\left(p_1^{k_1-1}(p_1-1), p_2^{k_2-1}(p_2-1), \ldots, p_s^{k_s-1}(p_s-1)\right)$

Zadanie 2

Rozważmy następującą wersję algorytmu Euklidesa wyliczającą $\gcd(a,b)$ (jest ona znana jako binarny algorytm Euklidesa)

```
procedura   gcd(a, b)
            jeśli a = b, to gcd ← a;
            jeśli a i b są parzyste,
              to gcd ← 2 · gcd(a/2, b/2);
            jeśli a lub b jest parzyste,
              to zamień je tak, że a parzyste
              i gcd ← gcd(a/2, b);
            w innym przypadku
              zamień je tak, że a większe
              i gcd ← gcd(a − b, b);
```

Pokaż że powyższy algorytm działa w czasie $O(n^2)$, gdzie n jest sumą długości a i b w zapisie dwójkowym.

Zadanie 3

Niech A będzie podzbiorem zbioru $\{1, 2, \ldots, 150\}$ liczącym 25 elementów. Pokaż, że w A istnieją dwie rozłączne pary elementów o jednakowych sumach.

Zadanie 4

Ile jest takich rozłożeń n rozróżnialnych piłeczek w k pudełkach ponumerowanych od 1 do k takich, że pudełka o numerach $1, 2, \ldots, l$ nie są puste?

Powodzenia !