Egzamin z matematyki dyskretnej

luty 2004, pierwszy termin, część A, czas: 120 min.

Zadanie 1

Pokaż, że

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \log_2 k} = \ln 2 \ln\ln n + O(1)$$

Zadanie 2

Definiujemy

$$\begin{aligned} \varphi_0 = \psi_1 &= 1, \\ \psi_k &= \varphi_{k-2} + \psi_{k-1}, \\ \varphi_k &= \text{ największa liczba nieparzysta niewiększa niż } \psi_k. \end{aligned}$$

Dla jakich k wartość ψ_k jest liczbą nieparzystą? Używając metody anihilatorów znajdź ogólną zwartą postać ciągu ψ_k (nie musisz wyliczać współczynników).

Zadanie 3

Rozważamy prostokąty o wierzchołkach w punktach kratowych (o obu współrzędnych całkowitych) dwuwymiarowego układu współrzędnych zawarte w kwadracie wyznaczonym przez punkty $(0,0)$ i (n,n). Ile jest takich prostokątów? Ile z tych prostokątów ma co najmniej jedną z krawędzi leżącą na osi x lub y?

Zadanie 4

Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej n któraś jej wielokrotność ma postać

$$999\cdots 9900\cdots 000.$$

Powodzenia !

Egzamin z matematyki dyskretnej
luty 2004, pierwszy termin, część B, czas: 120 min.

Zadanie 5
Graf cykliczny C_n dla n nieparzystego ($n \neq 1$) ma liczbę chromatyczną 3. Dwa pokolorowania są istotnie różne, jeśli nie przechodzą na siebie przez żaden automorfizm grafu C_n. Ile jest istotnie różnych (prawidłowych) pokolorowań C_{35} trzema kolorami?

Zadanie 6
Pokaż, że dla $n > 2$ istnieje n^{n-3} drzew n-wierzchołkowych z krawędziami ponumerowanymi liczbami $1, \ldots, n-1$.

Zadanie 7
Rozegrano turniej z udziałem n graczy. Wynikiem gracza jest liczba jego zwycięstw (remisy są niemożliwe). Wylicz możliwe układy wyników takie, że

- wyniki wszystkich graczy są różne
- wyniki dwóch graczy są takie same a pozostałych parami różne,
- wyniki wszystkich poza jednym graczem są jednakowe.

Uzasadnij że układy te są rzeczywiście możliwe i że nie ma innych.

Zadanie 8
W niektórych krajach mężczyzna może mieć do czterech żon. Pokaż, że warunkiem koniecznym i dostatecznym w takim kraju na to, aby n dziewcząt mogło znaleźć mężów, jest to by każde k z nich znało w sumie przynajmniej $k/4$ chłopców.

Powodzenia !