Egzamin z matematyki dyskretnej

luty 2007, pierwszy termin, część A, czas: 120 min.

Pary zadań 1,2 oraz 3,4 powinny być rozwiązane na osobnych kartkach

Zadanie 1

Pokaż, że równanie $ax + by = c$, dla a, b dodatnich, względnie pierwszych i $c > ab$, ma rozwiązanie.

Zadanie 2

Niech $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Jaka jest maksymalna moc rodziny podzbiorów X, o takiej własności, że dla dowolnych należących do niej zbiorów A, B zachodzi $A \cap B \neq \emptyset$? Zbuduj taką rodzinę o maksymalnej mocy i uzasadnij, że liczniejszej nie da się zbudować.

Zadanie 3

Niech $d(k)$ oznacza liczbę dzielników k. Pokaż, że

$$\sum_{k=1}^{n} d(k) = n \ln n + O(n).$$

Zadanie 4

Ile jest takich permutacji liczb $1, 2, \ldots 2n$, w których żadne dwie liczby $2k-1$ i $2k$ nie są obok siebie?

Powodzenia !

Egzamin z matematyki dyskretnej
luty 2007, pierwszy termin, część B, czas: 120 min.
Pary zadań 5,6 oraz 7,8 powinny być rozwiązane na osobnych kartkach

Zadanie 5
W urnie jest 1 los wygrywający, p przegrywających i r remisujących, tj. jeśli wylosujemy los remisujący, to go drzemy, wyrzucamy i losujemy jeszcze raz z urny. Losujemy tak długo, aż wyciągniemy los przegrywający albo los wygrywający. Jakie jest prawdopodobieństwo skończenia losowania z losem wygrywającym?

Zadanie 6
Dane jest drzewo T oraz jego automorfizm ϕ. Udowodnij, że istnieje wierzchołek v, taki że $\phi(v) = v$ lub istnieje krawędź $\{u, v\}$, taka że $\phi(\{u, v\}) = \{u, v\}$.

Zadanie 7
Niech G będzie grafem zawierającym cykl C i drogę długości k łączącą wierzchołki C. Pokaż, że G zawiera cykl długości przynajmniej $\sqrt{k}$.

Zadanie 8
Ścieżką powiększającą skojarzenie M grafu G nazywamy taką drogę $v_1, v_2, \ldots, v_{2k}$, że dla wszystkich $i \in 1, 2, \ldots, k-1$ mamy $\{v_{2i}, v_{2i+1}\} \in M$, i do v_1, v_{2k} nie są incydentne krawędzie z M. W jaki sposób mając ścieżkę powiększającą można powiększyć M do większego skojarzenia M'? Pokaż, że ścieżka powiększająca istnieje dla każdego skojarzenia M, które nie jest największe, w dowolnym grafie G. Zaproponuj wielomianowy algorytm znajdowania największego skojarzenia w dowolnym grafie. Jaką złożoność ma Twój algorytm?

Powodzenia !