Egzamin z matematyki dyskretnej

luty 2011, pierwszy termin, część A, czas: 120 min.

Zadania powinny być rozwiązane na osobnych kartkach

Zadanie 1

Niech a i b będą dowolnymi liczbami całkowitymi. Pokaż, że jeśli $a^3|b^5$, to $a|b^2$.

Zadanie 2

W czerwonym sześcianie wybieramy cztery krawędzie i kolorujemy je na zielono. Oblicz, na ile istotnie różnych sposobów możemy to zrobić. Dwa kolorowania są istotnie różne, jeśli z jednego nie da się osiągnąć drugiego przez żaden obrót sześcianu.

Zadanie 3

Oblicz (np. z zasady włączeń/wyłączeń) liczbę rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = N,$$

gdy $0 \leq x_i \leq K$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$.

Zadanie 4

Niech $F(t)$ będzie funkcją tworzącą ciągu f_n w którym $f_0 = 1$. Napisz wzór pozwalający wyliczyć wyrazy g_n ciągu, którego funkcją tworzącą jest $G(t) = 1/F(t)$. Wzór ten powinien używać do wyliczenia g_n wartości f_i i wyrazów g_i dla $i < n$. Pokaż, że jeśli wyrazy f_n są całkowite, to g_n też są całkowite.

Powodzenia !

Egzamin z matematyki dyskretnej
luty 2011, pierwszy termin, część B, czas: 120 min.
Zadania powinny być rozwiązane na osobnych kartkach

Zadanie 5
Drabiną D_n nazywamy graf składający się z $2 \cdot (n+1)$ wierzchołków, taki jak narysowany poniżej. Udowodnij, że liczba drzew rozpinających drabiny D_n wynosi $\left\lfloor (1/2 + 1/\sqrt{3}) \cdot (2+\sqrt{3})^n \right\rfloor$.

Zadanie 6
Pokaż, że każdy graf prosty planarny o co najmniej czterech wierzchołkach ma co najmniej cztery wierzchołki stopnia mniejszego niż 6.
Wsk. Rozważ krawędziowo maksymalny graf płaski.

Zadanie 7
Pokryciem cyklowym digrafu G nazywamy taki zbiór C cykli skierowanych G, że każdy wierzchołek należy do dokładnie jednego cyklu z C. Podaj wielomianowy algorytm, który oblicza pokrycie cyklowe danego digrafu, jeśli pokr. cykl. w tym digrafie istnieje i daje odpowiedź NIE, jeśli nie istnieje. *Wskazówka:* rozszczep każdy wierzchołek na dwa i zbuduj odpowiedni graf dwudzielny.

Zadanie 8
Graf krawędziowy $L(G)$ grafu G ma zbiór wierzchołków $V(L(G)) = E(G)$ i dwa z tych wierzchołków są połączone krawędzią gdy odpowiadające im krawędzie mają wspólny wierzchołek. Wyraź $m(L(G))$ za pomocą stopni wierzchołków G.

Powodzenia !