Matematyka Dyskretna, II Rok Informatyki,
luty 1997, termin: 2, część: 1, czas: 120 min.

Zadanie 1
Pokaź, źe następujący algorytm Euklidesa oblicza dla nieujemnych a, b wartość $\gcd(a, b)$ oraz takie m, n całkowite, źe $ma + nb = \gcd(a, b)$:

procedure euklides(a, b; **var** m, n, gcd);
var m_1, n_1;
begin if $a \bmod b = 0$
  then $(m, n, \gcd) \leftarrow (0, 1, b)$
  else begin euklides($b, a \bmod b, m_1, n_1$,gcd);
    $(m, n) \leftarrow (n_1, m_1 - (a \operatorname{div} b) \cdot n_1)$;
   end;
end;

Pokaź, źe jeżeli $a, b > 0$ i jedna z tych liczb jest różna od 1, to algorytm ten oblicza takie wartości m, n, źe $|m| < b$ i $|n| < a$. Pokaź następnie, źe przy wywołaniu algorytmu Euklidesa wszystkie wartości wyliczane w trakcie jego dzialania są niewiększe od $\max(a, b)$.

Zadanie 2
Rozwiąź zaleźność rekurencyjną:

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n2^{n+1}, \text{ gdy } a_0 = a_1 = 1$$

Zadanie 3
Pokaź, źe relacja $f \prec g \leftrightarrow f = o(g)$ jest relacją quasiporządku i uporządkuj wg. tej relacji następujące funkcje (wszystkie logarytmy mają podstawę 2):

$$\log n, (\log n)^n, n^{\log n}, \log(n^n), 3^{\log n}, n, n^2, 2^{\sqrt{n}}, 1.01^n, 0.99^n, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Zadanie 4
Ile jest takich permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, źe źadna z liczb $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ nie znajdzie się na pozycji i?

Powodzenia !

Matematyka Dyskretna, II Rok Informatyki,
luty 1997, termin: 2, część: 2, czas: 120 min.

Zadanie 1
Oblicz liczbę różnych rozłożeń ośmiu wzajemnie nieatakujących się wież na szachownicy 8×8. Rozłożenia uważamy za różne, jeśli nie są identyczne i jednego nie da się przeprowadzić na drugie ani przez obrót, ani przez lustrzane odbicie.
Wsk.: Użyj Lematu Burnside'a.

Zadanie 2
Ideałem zbioru częściowo uporządkowanego $P = (X, \leq)$ nazywamy podzbiór $I \subseteq X$ spełniający warunek:

$$\bigwedge_{x \in I} y \leq x \Rightarrow y \in I.$$

Pokaź, że $Q = (\mathcal{I}, \subseteq)$, gdzie $\mathcal{I}$ oznacza zbiór wszystkich ideałów posetu P, jest kratą. Czy musi to być krata rozdzielna?

Zadanie 3
Pokaź, że n-wierzchołkowy graf nie zawiarający trójkątów ma co najwyżej $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ krawędzi.

Zadanie 4
Pokaź, że jeśli istnieje wielomianowy algorytm rozstrzygający problem istnienia cyklu Hamiltona w grafach nieskierowanych, to istnieje rownież taki algorytm dla grafów skierowanych.

Powodzenia !