EGZAMIN Z MATEMATYKI DYSKRETNEJ
LUTY 2002, TERMIN POPRAWKOWY, CZĘŚĆ A, CZAS: 120 MIN.

ZADANIE 1

Twierdzenie Legendre'a. Niech $10^k a_k + 10^{k-1}a_{k-1} + \cdots + a_0$ będzie zapisem dziesiętnym liczby całkowitej a (a_i – kolejne cyfry dziesiętne). Pokaż, że

$$\sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{a}{10^i} \right\rfloor = \frac{a - (a_0 + a_1 + \cdots a_k)}{9}$$

ZADANIE 2

Łatwo wykazać, że jeśli $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, to

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix}$$

Pokaż analogiczny wzór dla dowolnej zależności rekurencyjnej w postaci $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{k} \beta_i b_{n-i+1}$. W jaki sposób wykorzystując ten wzór można obliczyć b_n używając $O(M(k) \log n)$ operacji arytmetycznych. W powyższym wzorze $M(k)$ jest liczbą operacji arytmetycznych potrzebnych do pomnożenia dwóch macierzy $k \times k$.

ZADANIE 3

Znajd"x zwarty (bez $\sum$ i ...) wzór na sumę:

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots + nx^n.$$

ZADANIE 4

W ilu zerojedynkowych macierzach $n \times n$ co najmniej jeden wiersz składa się z samych zer?

POWODZENIA !