Egzamin z matematyki dyskretnej

luty 2005, termin poprawkowy, część A, czas: 120 min.

Zadanie 1

Podaj zwartą (bez symboli $\sum$ i $\cdots$) postać sumy

$$\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor .$$

Zadanie 2

Znajdź wszystkie rozwiązania układu kongruencji

$$\begin{cases} 30 | 8x+2 \\ 35 | 11x-1 \end{cases}$$

Zadanie 3

Niech $u_k = (-2)^{k-1}$ Pokaż, że

$$\sum_{k=1}^{m} u_k \binom{m}{k} = \begin{cases} 0 \text{ dla parzystego } m \\ 1 \text{ dla nieparzystego } m. \end{cases}$$

Następnie udowodnij wzór

$$|A_1 \div A_2 \div \cdots \div A_n| = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} u_k |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$$

gdzie $A \div B$ oznacza różnicę symetryczną, a sumowanie odbywa się po wszystkich ciągach niepustych.

Zadanie 4

Ile jest ciągów długości n złożonych z cyfr 0,1,2, w których żadne dwa zera nie są obok siebie? Ułóż i rozwiąż odpowiednią zależność rekurencyjną otrzymując zwartą postać rozwiązania (bez symboli $\sum$ i $\cdots$).

Powodzenia !

Egzamin z matematyki dyskretnej
luty 2005, termin poprawkowy, część B, czas: 120 min.

Zadanie 5
Przypuśćmy, że $\mathcal{P}$ jest programem w postaci `while ... do ...`. Program ten uruchamiamy ze ściśle określonymi danymi. Zakończenie pracy programu $\mathcal{P}$ zależy od zajścia pewnych zdarzeń losowych. W związku z tym mamy pewną przestrzeń probabilistyczną z prawdopodobieństwem P i w tej przestrzeni zdarzenia losowe A_i oraz B_i dla wszystkich $i \in N$ ($0 \notin N$). Zdarzenie A_i zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy pętla w programie $\mathcal{P}$ została wykonana przynajmniej i razy, a zdarzenie B_i zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy program $\mathcal{P}$ zakończył pracę (dokładnie) po i–krotnym wykonaniu zawartej w nim pętli. Przyjmijmy, że prawdopodobieństwo warunkowe $P(A_i|B_i)$ nie zależy od i i jest równe p. Znajdź prawdopodobieństwo zdarzenia C polegającego na tym, że program $\mathcal{P}$ nigdy nie zakończy pracy.

Zadanie 6
Oblicz liczbę drzew spinających grafu $K_{3,3}$.

Zadanie 7
Skonstruuj algorytm wielomianowy znajdujący liczbę chromatyczną dowolnego grafu stopnia 3.

Zadanie 8
Pokryciem wierzchołkowym nazywamy podzbiór wierzchołków grafu taki że każda krawędź grafu jest incydentna z pewnym z tych wierzchołków. *Cyklicznym pokryciem krawędziowym* digrafu nazywamy taki podzbiór krawędzi digrafu, że każdy (skierowany) cykl digrafu zawiera pewną krawędź z tego podzbioru. Pokaż wielomianową redukcję problemu istnienia pokrycia wierzchołkowego mocy k w grafie do problemu istnienia cyklicznego pokrycia krawędziowego rozmiaru k w digrafie.

Powodzenia !