Egzamin z matematyki dyskretnej
luty 2006, termin poprawkowy, część A, czas: 120 min.

Zadanie 1
Znajdź zwarty wzór na

$$\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$$

Zadanie 2
Znajdź najmniejesze takie x naturalne, że

$$\begin{cases} x \equiv 31 \bmod 99 \\ x \equiv 14 \bmod 101 \end{cases}$$

Zadanie 3
Ile najwięcej kawałków sera można uzyskać z grubego kawałka za pomocą n cięć? Rozwiąż odpowiednią zależność rekurencyjną (podaj zwarty wzór).

Zadanie 4
Niech $s(n)$ będzie liczbą ciągów liczb całkowitych $x_1, x_2, \ldots, x_k$, dla których $0 < x_i \leq n, 2x_i \leq x_{i+1}$ (ciąg pusty też spełnia te warunki). Pokaż, że $s(n)$ spełnia zależność rekurencyjną

$$s(n) = s(n-1) + s(\lfloor n/2 \rfloor).$$

Pokaż też, że funcja tworząca $S(x)$ ciągu $s(n)$ spełnia zależność

$$S(x)(1-x) = S(x^2)(1+x).$$

Powodzenia !

Egzamin z matematyki dyskretnej
luty 2006, termin poprawkowy, część B, czas: 120 min.
Pary zadań 5,6 oraz 7,8 powinny być rozwiązane na osobnych kartkach

Zadanie 5
Zadanie 6
Pokaż, że graf G jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego pograf H zawiera zbiór niezależny (tzn. parami niepołączonych) wierzchołków o mocy co najmniej $|V(H)|/2$.

Zadanie 7
Dany jest graf dwudzielny w którym $V = V_1 \cup V_2$ i pary wierzchołków wewnątrz V_i nie są połączone. W jednym z zadań na ćwiczeniach pokazaliśmy, że w grafie tym warunkiem koniecznym i dostatecznym istnienia skojarzenia k-krawędziowego jest to by zbiór sąsiadów $N(U)$ dla dowolnego $U \subseteq V_1$ spełniał zależność $|N(U)| \geq |U| - |V_1| + k$. Pokrycie wierzchołkowe to zbiór wierzchołków w którym każda krawędź grafu ma jeden z końców. Wykaż, że w grafie dwudzielnym najliczniejsze skojarzenie ma moc równą najmniejszemu pokryciu wierzchołkowemu (Tw. Königa-Egervary'ego).

Zadanie 8
Sprowadź za pomocą transformacji wielomianowej problem istnienia w dowolnym grafie G pokrycia wierzchołkowego o mocy k do istnienia w grafie G' kliki rozmiaru k'.

Powodzenia !