Egzamin z matematyki dyskretnej
luty 2008, termin poprawkowy, część A, czas: 120 min.
Pary zadań 1,2 oraz 3,4 powinny być rozwiązane na osobnych kartkach

Zadanie 1

Pokaż, że dla ustalonych rzeczywistych $a > 1, b > 0$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^b a^k = \frac{n^b a^n}{a-1} + O(n^{b-1} a^n).$$

Wsk.: Udowodnij najpierw, że $n^b - (n-1)^b \leq b n^{b-1}$.

Zadanie 2

Przedstaw następującą sumę jako współczynnik dwumianowy:

$$\sum_{i_1=1}^{m} \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} \cdots \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} 1.$$

Zadanie 3

Znajdź liczbę istotnie różnych kart 4×4 z dowolną liczbą dziurek. Karty można obracać i odwracać.

Zadanie 4

Wylicz funkcję tworzącą ciągu a_n określonego wzorem

$$a_0 = 0,\ a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i}{i}.$$

Powodzenia !

Egzamin z matematyki dyskretnej

luty 2008, termin poprawkowy, część B, czas: 120 min.

Pary zadań 5,6 oraz 7,8 powinny być rozwiązane na osobnych kartkach

Zadanie 5

Mamy monetę, na której z prawdopodobieństwem p wypada orzeł (O), a z prawdopodobieństwem $1-p$ reszka (R). Gramy w dwie osoby, rozpoczynamy grę ze stawką 1. Za każdym razem, gdy wypadnie O, gracz pierwszy wygrywa aktualną stawkę od drugiego gracza i stawka ulega podwojeniu. Za każdym razem, gdy wypada R, gracz drugi wygrywa aktualną stawkę od pierwszego gracza i stawka zmniejsza się dwukrotnie. Jaka jest oczekiwana sumaryczna wygrana pierwszego gracza po n grach?

Zadanie 6

Dany jest graf prosty spójny G oraz jego dwa wierzchołki x, y, $d(x), d(y) \geq 3$. Wiemy, że graf $G \bullet \{x, y\}$ jest 3-spójny. Pokaż, że G też jest 3-spójny.

Zadanie 7

Wykaż, że graf pełny K_n jest sumą krawędziowo rozłącznych dróg długości 2 wtedy i tylko wtedy gdy $n \equiv 0$ lub $1 (\mathrm{mod}\ 4)$.

Zadanie 8

Wykaż, że ściany grafu płaskiego kubicznego można pokolorować trzema kolorami wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie ściany są ograniczone parzystą liczbą krawędzi (wymagane precyzyjne rozwiązanie).

Wsk.: Pokaż najpierw, że w grafie tym istnieje ściana o co najwyżej czterech bokach.

Powodzenia !