Egzamin z matematyki dyskretnej
luty 2009, termin poprawkowy, część A, czas: 120 min.
Pary zadań 1,2 oraz 3,4 powinny być rozwiązane na osobnych kartkach

Zadanie 1
Jak wiele z pierwszych 1000 liczb naturalnych może być przedstawionych w postaci

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor +$$

Zadanie 2
Na szachownicy $n \times m$ dla $n \leq m$ umieszczono $(m-1)k+1$ wież. Pokaż, że istnieje takich k wież które nie atakują się wzajemnie.

Zadanie 3
Tablicę $2n$ elementową wypełniamy liczbami naturalnymi z przedziału $[1, n]$ tak, aby elementy na pozycjach parzystych tworzyły ciąg niemalejący. Na ile sposobów możemy to zrobić?

Zadanie 4
W tablicy prostokątnej $n \times m$ zaznaczamy p pól. Na ile sposobów możemy to zrobić, jeśli chcemy, aby w każdym wierszu i każdej kolumnie jakieś pole było zaznaczone?

Powodzenia !

Egzamin z matematyki dyskretnej
luty 2009, termin poprawkowy, część B, czas: 120 min.
Pary zadań 5,6 oraz 7,8 powinny być rozwiązane na osobnych kartkach

Zadanie 5

Dany jest ciąg t_n określony jak następuje

$$t_0 = t_1 = 1, t_n = 3t\lfloor n/2 \rfloor + 7n \text{ dla } n > 1.$$

Wylicz funkcję $F(x)$, dla której funkcja tworząca $T(x)$ ciągu t_n spełnia zależność

$$T(x) = 3(x+1)T(x^2) + F(x)$$

Zadanie 6

Ciąg 01110100 można potraktować jako cykliczny „sklejając" oba jego końce. Zauważmy, że każda z możliwych trójek binarnych: $000, 001, 011, ..., 111$ występuje dokładnie raz w tym ciągu cyklicznym. Czy można skonstruować analogiczne ciągi cykliczne długości 16 dla czwórek binarnych i długości 32 dla piątek?

Wsk.: Problem może być wyrażony jako problem istnienia cyklu Eulera w pewnym grafie.

Zadanie 7

Mówimy, że wierzchołek w turnieju jest królem, jeśli do każdego innego wierzchołka można z niego dojść po drodze długości 2 lub mniejszej. Pokaż, że jeśli wierzchołek x ma krawędzie wchodzące to istnieje wierzchołek y, taki że y jest przodkiem x i y jest królem.

Zadanie 8

Pokaż, że graf G jest dwuspójny wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich trójek (uporządkowanych) wierzchołków (x, y, z) istnieje droga z x do z przechodząca przez y.

Powodzenia !