Egzamin z matematyki dyskretnej
luty 2011, termin poprawkowy, część A, czas: 125 min.
*Zadania powinny być rozwiązane na osobnych kartkach*

Zadanie 1
Znajdź wszystkie liczby naturalne, których liczba podzielników wynosi 77.

Zadanie 2
Udowodnij, że zbiór $\{6k+5 : k \in \mathbb{N}\}$ zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Zadanie 3
Rozważamy graniastosłup, którego podstawą jest sześciokąt foremny. Dwa podzbiory 12 jego wierzchołków uważamy za istotnie różne, gdy nie przechodzą one na siebie poprzez obroty graniastosłupa. Ile jest istotnie różnych podzbiorów wierzchołków?

Zadanie 4
Niech $s(n)$ będzie liczbą skończonych ciągów $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ liczb całkowitych dla których $2x_{i+1} \leq x_i$ i $1 \leq x_i \leq n$. Pokaż zależność rekurencyjną

$$s(n) = s(n-1) + s\left(\lfloor n/2 \rfloor\right), s(1) = 1.$$

Pokaż też że funkcja tworząca ciągu $s(n)$ spełnia równanie

$$(1-t)S(t) = (1+t)S(t^2).$$

Powodzenia !

Egzamin z matematyki dyskretnej
luty 2011, termin poprawkowy, część B, czas: 125 min.
*Zadania powinny być rozwiązane na osobnych kartkach*

Zadanie 5
W pewnym wielościanie każdy wierzchołek ma stopień równy trzy, a każda ściana ma co najwyżej sześć boków. Udowodnij, że co najwyżej cztery ściany tego wielościanu są trójkątami.

Zadanie 6
Pokaż, że dowolny graf dwudzielny ma skojarzenie w którym są jego wszystkie wierzchołki największego stopnia.

Zadanie 7
Niech $a = 2m(G)/n(G) > 0$ oznacza średni stopień grafu $G$. Pokaż, że w $G$ istnieje podgraf, w którym minimalny stopień wierzchołka jest większy niż $a/2$.

Zadanie 8
Pokaż, że dowolny graf $n$-wierzchołkowy bez trójkątów ma liczbę chromatyczną co najwyżej $2\sqrt{n}$.

Powodzenia !