

# Programowanie (M) 2013

## Lista zadań nr 7

Na ćwiczenia 12 czerwca 2013

**Zadanie 1 (1 pkt).** Używając reguł Hoare'a, udowodnij poprawność następujących asercji częściowej poprawności instrukcji:

1.

$$\begin{aligned} & \{x = i \wedge y = j \wedge j \geq 0\} \\ & v := 0; \\ & z := 1; \\ & \mathbf{while} \ z \leq y \ \mathbf{do} \ (v := v + x; z := z + 1) \\ & \{v = i * j\} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} & \{z = i\} \\ & x := 1; y := 1; \mathbf{while} \ z \neq 0 \ \mathbf{do} \ (y := x + y; x := y - x; z := z - 1) \\ & \{x = F_i \wedge i \geq 0\} \end{aligned}$$

przy czym  $F_n$  oznacza  $n$ -ty wyraz ciągu Fibonacciego ( $F_0 = 1, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$  dla  $n \in \mathbb{N}$ ).

W obu przypadkach przedstaw odpowiednie drzewo dowodu oraz odpowiadający mu anotowany program.

**Zadanie 2 (1 pkt).** Rozwiąż zadania 6.3 i 6.5 z [Win].

**Zadanie 3 (1 pkt).** Rozwiąż zadanie 6.6 z [Win].

**Zadanie 4 (1 pkt).** Udowodnij poprawność systemu asercji częściowej poprawności programów języka **While**, tzn. udowodnij, że jeżeli  $\vdash \{A\}S\{B\}$ , to  $\models \{A\}S\{B\}$ . (Podane na wykładzie pojęcie prawdziwości asercji poprawności częściowej odwoływało się do semantyki denotacyjnej języka **While**, ale jeżeli wygodniej Ci używać semantyki naturalnej, to nic nie stoi na przeszkodzie.)

**Zadanie 5 (1 pkt).** Bez odwoływania się do twierdzenia o (relatywnej) pełności systemu reguł Hoare'a, pokaż, że:

1.  $\vdash \{A\} \text{ while true do skip } \{B\}$ , dla dowolnych asercji  $A$  i  $B$ .
2.  $\vdash \{\text{false}\} S \{B\}$ , dla dowolnej instrukcji  $S$  oraz asercji  $B$ .
3.  $\vdash \{A\} S \{\text{true}\}$ , dla dowolnej instrukcji  $S$  oraz asercji  $A$ .

**Zadanie 6 (1 pkt).** Zaproponuj odpowiednią regułę Hoare'a poprawności częściowej instrukcji `repeat  $S$  until  $b$` . Udowodnij poprawność Twojej reguły ze względu na semantykę naturalną instrukcji `repeat  $S$  until  $b$` .

**Zadanie 7 (1 pkt).** Używając reguł Hoare'a, udowodnij poprawność następujących asercji całkowitej poprawności instrukcji:

1.
 
$$\begin{array}{l}
 [x = i \wedge i \geq 0] \\
 y := 1; \\
 \text{while } x > 0 \text{ do } (y := x * y; x := x - 1) \\
 [y = i!]
 \end{array}$$
2.
 
$$\begin{array}{l}
 [z = i \wedge i \geq 0] \\
 x := 1; \\
 y := 1; \\
 \text{while } z \neq 0 \text{ do } (y := x + y; x := y - x; z := z - 1) \\
 [x = F_i]
 \end{array}$$

przy czym  $F_n$  oznacza  $n$ -ty wyraz ciągu Fibonacciego ( $F_0 = 1, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$  dla  $n \in \mathbb{N}$ ).

W obu przypadkach przedstaw odpowiednie drzewo dowodu oraz odpowiadający mu anotowany program.

**Zadanie 8 (1 pkt).** Rozważmy gramatykę anotowanych instrukcji języka **While**, w którym pewne instrukcje zawierają anotacje w postaci formuł języka asercji Assn:

$$\begin{array}{l}
 S ::= \text{skip} \mid x := a \mid S_0; x := a \mid S_0; \{A\}S_1 \\
 \quad \mid \text{if } b \text{ then } S_0 \text{ else } S_1 \mid \text{while } b \text{ do } \{A\}S
 \end{array}$$

przy czym  $S_1$  w instrukcji  $S_0; \{A\}S_1$  nie jest podstawieniem.

Definiujemy następującą funkcję  $vc$ , która dla danej asercji częściowej poprawności  $\{A\}S\{B\}$  (gdzie  $S$  jest anotowaną instrukcją) generuje zbiór tzw. *warunków weryfikacji*:

$$\begin{aligned}
 vc(\{A\}\text{skip}\{B\}) &= \{A \Rightarrow B\} \\
 vc(\{A\}x := a\{B\}) &= \{A \Rightarrow B[a/x]\} \\
 vc(\{A\}S_0; x := a\{B\}) &= vc(\{A\}S_0\{B[a/x]\}) \\
 vc(\{A\}S_0; \{C\}S_1\{B\}) &= vc(\{A\}S_0\{C\}) \cup vc(\{C\}S_1\{B\}) \\
 vc(\{A\}\text{if } b \text{ then } S_0 \text{ else } S_1\{B\}) &= vc(\{A \wedge b\}S_0\{B\}) \cup \\
 &\quad vc(\{A \wedge \neg b\}S_1\{B\}) \\
 vc(\{A\}\text{while } b \text{ do } \{C\}S\{B\}) &= vc(\{C \wedge b\}S\{C\}) \cup \\
 &\quad \{A \Rightarrow C, C \wedge \neg b \Rightarrow B\}
 \end{aligned}$$

1. Udowodnij, że dla każdej asercji częściowej poprawności  $\{A\}S\{B\}$  (gdzie  $S$  jest anotowaną instrukcją), jeżeli wszystkie asercje w zbiorze  $vc(\{A\}S\{B\})$  są prawdziwe, to  $\{A\}S\{B\}$  jest prawdziwa.
2. Czy twierdzenie odwrotne jest prawdziwe?