

Okolo 2 rozwiązania zadania nr 6 z egzaminu z MD(M) z dnia 05.02.2024

1. Rozważamy następującą procedurę generowania zbioru niezależnego A (będącą podzbiorem/podobną do sekwencyjnego algorytmu kolorowania grafu): daną mamy permutację σ wierzchołków grafu; na początku $A = \emptyset$; wykonujemy $|V|$ kroków: w i -tym kroku patrzymy na i -ty wierzchołek z permutacji σ i dodajemy go do A , gdy możemy, tzn. gdy żaden jego sąsiad nie jest już w A (i nie dodajemy w przeciwnym przypadku).

Losujemy permutację σ zbioru V (każdą z jednakowym prawdopodobieństwem) i uruchamiamy na niej procedurę. Wystarczy pokazać, że wartość oczekiwana $\mathbb{E}[|A|]$ jest nie mniejsza niż $\sum_{v \in V} \frac{1}{\deg(v)+1}$. (Skoro średnio jest co najmniej tyle, to dla jakiejś permutacji procedura daje co najmniej tyle.)

Z liniowości wartości oczekiwanej: $\mathbb{E}[|A|] = \sum_{v \in V} \mathbb{E}[\mathbb{1}(v \in A)] = \sum_{v \in V} P(v \in A)$, czyli wystarczy stwierdzić, że $P(v \in A) \geq \frac{1}{\deg(v)+1}$. ($\mathbb{1}$ to indykator zdarzenia, zwany też funkcją charakterystyczną (zbioru))

Dla dowolnego wierzchołka $v \in V$ i permutacji σ mamy, że powyższa procedura na pewno umieszcza v w A w przypadku, gdy v pojawia się w σ przed wszystkimi swoimi sąsiadami. Takie permutacje można wygenerować następująco, poprzez wstawianie kolejno wierzchołków pomiędzy dotychczas ustawione (lub na początek/koniec): stawiamy pierwszego sąsiada v (1 sposób), potem drugiego sąsiada v po lewej lub po prawej stronie poprzedniego (2 sposoby), potem trzeciego po lewej, w środku lub po prawej (3 sposoby), czwartego na 4 sposoby itd.; po wszystkich $\deg(v)$ sąsiadach v , wstawiamy v – musimy postawić go na początku (1 sposób), a potem wstawiamy kolejno pozostałe wierzchołki w dowolne dostępne miejsce. Czyli cały czas mamy pełną swobodę wyboru za wyjątkiem przypadku, gdy stawiamy v , który jest $(\deg(v)+1)$ -szym ustawianym wierzchołkiem – wówczas mamy jedną możliwość wyboru spośród $\deg(v)+1$ miejsc do wstawienia, więc v pojawia się przed wszystkimi swoimi sąsiadami z prawdopodobieństwem $\frac{1}{\deg(v)+1}$. I stąd wynika $P(v \in A) \geq \frac{1}{\deg(v)+1}$.

2. (Poniżej, dla grafu G , przez $V(G)$ oznaczamy zbiór jego wierzchołków i $\deg_G(v)$ to stopień wierzchołka v w grafie G .)

Rozwiązanie zachłanne: niech $v \in V(G)$ ma najmniejszy stopień w G , oznaczmy ten stopień przez δ . Oznaczmy przez N zbiór składający się z v i jego sąsiadów. Niech H to graf powstający z G poprzez wyrzucenie zbioru N .

Wówczas

$$\sum_{v \in V(G)} \frac{1}{\deg_G(v)+1} = \sum_{v \in N} \frac{1}{\deg_G(v)+1} + \sum_{v \in V(G) \setminus N} \frac{1}{\deg_G(v)+1} \leq 1 + \sum_{v \in V(H)} \frac{1}{\deg_H(v)+1},$$

gdzie ostatnia nierówność zachodzi, bo:

pierwszy składnik jest $\leq |N| \cdot \frac{1}{\delta+1} = (\delta+1) \frac{1}{\delta+1} = 1$;

drugi szacuje się z tego, że, po usunięciu N z G , stopień każdego wierzchołka z $V(G) \setminus N$ (równego $V(H)$) może tylko zmaleć.

I ta nierówność uzasadnia, że można użyć indukcji: znajdujemy zbiór niezależny w H mocy $\geq \sum_{v \in V(H)} \frac{1}{\deg_H(v)+1}$, dodajemy do tego v i dostajemy zbiór niezależny mocy $\geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{\deg_G(v)+1}$ w G . (Podstawą indukcji jest graf pusty.)

Komentarz: drugie rozwiązanie to właściwie wskazywanie konkretnej permutacji, dla której procedura z pierwszego daje nie mniejszy zbiór niezależny niż wartość oczekiwana (najpierw v , potem jego sąsiady, potem indukcyjnie).

(DD)