28 września 2023

Zadania z matematyki dyskretnej, lista nr 1.

1. Dla każdego z poniższych ciągów znajdź najmniejsze k, takie że $a_n = O(n^k)$

   (a) $a_n = (2n^{81.2} + 3n^{45.1})/(4n^{23.3} + 5n^{11.3})$

   (b) $a_n = 5^{\log_2 n}$ (c) $a_n = (1.001)^n$ (d) $a_n = n \log^3 n$

2. Uporządkuj od nawolniej do najszybciej rosnącej funkcje (logarytmy mają podstawę 2):

$$\log n, (\log n)^n, n^{\log n}, \log(n^n), 3^{\log n}, n, n^2, 2^{\sqrt{n}}, 1.01^n, 0.99^n, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

3. Podaj przykład takich funkcji $f(n)$ i $g(n)$, że żadna z trzech relacji $f(n) = o(g(n))$, $g(n) = o(f(n))$, $f(n) = \Theta(g(n))$ nie jest prawdziwa, chociaż obie funkcje monotonicznie rosną do ∞.

4. Wykaż, że $n^a(\log n)^b(\log\log n)^c$ jest $o(n^d(\log n)^e(\log\log n)^f)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(a, b, c) \prec (d, e, f)$, gdzie $\prec$ oznacza porządek leksykograficzny (tj. taki, jak w słowniku).

5. Pokaż, że:

   (a) jeśli $f = o(g)$, to $f = O(g)$,

   (b) jeśli $f \sim g$, to $f = \Theta(g)$,

   (c) $f = O(g)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g = \Omega(f)$,

   (d) $f = O(g)$ i $g = O(f)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g = \Theta(f)$,

   Które z pięciu symboli $o, O, \sim, \Theta, \Omega$ są przechodnie? Które z nich są symetryczne?

6. Wykaż, że

$$e^{1/n} = 1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

7. Rozważmy algorytm sortujący n liczb w następujący sposób. Wybierz najmniejszą, postaw na pierwszym miejscu, wybierz najmniejszą z pozostałych i postaw na drugim miejscu, najmniejszą z pozostałych postaw na trzecim miejscu itd. aż do wyczerpania liczb. Określ złożoność czasową powyższej procedury.

8. Oceń złożoność czasową pisemnego dodawania i mnożenia liczb długości n.

9. Oceń złożoność czasową pisemnego dzielenia dwóch liczb długości niewiększej niż n przez siebie w najgorszym przypadku. W tym celu rozważ wszystkie możliwe długości k i l dzielonych liczb. Który z układów k i l daje największy czas działania procedury?

10. Używając całkowania oszacuj (podobnie jak na wykładzie) sumę $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

11. Podobnie jak w poprzednim zadaniu pokaż, że $\displaystyle\ln n! = \sum_{k=1}^{n} \ln n \le (n+1)\ln(n+1) - n$

    Wywnioskuj z tego, że $n! \le (n+1)^{n+1}/e^n$.

12. Niech $h(n) = f(n) + O(g(n))$, gdzie $g(n) \prec f(n)$. Podaj najlepsze jakie umiesz oszacowanie na $1/h(n)$. Oszacowanie powinno mieć postać $F(n) + O(G(n))$.

13. Wykaż, że ilości liczb całkowitych w następujących przedziałach są odpowiednio równe ($a < b$):

    (a) w $[a, b]$ — $\lfloor b \rfloor - \lceil a \rceil + 1$

    (b) w $[a, b)$ — $\lceil b \rceil - \lceil a \rceil$

    (c) w $(a, b]$ — $\lfloor b \rfloor - \lfloor a \rfloor$

    (d) w (a, b) — $\lceil b \rceil - \lfloor a \rfloor - 1$

14. Pokaż, że dla dowolnego $x \ge 0$

$$\lfloor \sqrt{x} \rfloor = \left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor.$$

15. Pokaż, że

    (a) $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$ i $\lceil x - \frac{1}{2} \rceil$ są wyrażeniami przybliżającymi dowolną liczbę rzeczywistą x najbliższą niej liczbą całkowitą. Do czego przybliżają one liczby znajdujące się dokładnie w połowie między kolejnymi liczbami całkowitymi?

    (b) Ile rozwiązań x ma równanie $(n+1)x - \lfloor nx \rfloor = c$?