Rozwiązywanie równań rekurencyjnych

Antoni Kościelski

2 lutego 2014

1 Troszeczkę teorii

1.1 Funkcje tworzące

Ciągi liczb czasem utożsamia się z wielomianami lub szeregami. Dzięki temu dostajemy dla ciągów możliwość korzystania z bogatszego aparatu matematycznego. Bywa, że okazuje się to pożyteczne.

Niech $a_0, a_1, a_2, \ldots$ będzie nieskończonym ciągiem liczb, nawet zespolonych, ewentualnie elementów jakiegoś abstrakcyjnego ciała lub pierścienia. Z takim ciągiem wiążemy sumę

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j. \tag{1}$$

Sumę tą możemy rozumieć jako tzw. szereg formalny, czyli wzór, którym możemy operować tak, jak każdym innym tego typu wzorem.

Jeżeli współczynniki a_i liczbami rzeczywistymi lub zespolonymi, a więc liczbami, dla których mamy wprowadzone pojęcie granicy, to taki wzór może definiować funkcję

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} a_j x^j.$$

Nazywamy ją funkcją tworzącą ciągu $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Oczywiście, $f(0) = a_0$. Trzeba jednak pamiętać, że granica, a więc i funkcja tworząca, może nie być określona. W szczególności nie ma powodu, aby funkcja tworząca była określona dla jakiejkolwiek liczby różnej od 0.

Wprowadzoną terminologię rozszerzamy na przypadek szeregów formalnych. Nawet w tym przypadku szereg (1) określamy jako funkcję tworzącą i wzór używany w definicji funkcji traktujemy jak funkcję.

Podobnie postępujemy w przypadku skończonych ciągów. Z ciągiem $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ wiążemy wielomian

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j.$$

Zależnie od potrzeb wielomian ten rozumiemy jako wielomian formalny lub jako funkcję. Wielomian ten można uważać za szereg formalny, w którym współczynniki a_n oraz o indeksach większych od n są równe 0.

1.2 Szeregi formalne

Szeregi formalne dodajemy i mnożymy zgodnie ze wzorami

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j + \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j = \sum_{j=0}^{\infty} (a_j + b_j) x^j$$

oraz

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{j} a_i b_{j-i} \right) x^j .$$

Można przyjąć, że ten drugi wzór wynika z uogólnionego prawa rozdzielności po pogrupowaniu jednomianów z tym samym wykładnikiem:

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j \right) = \begin{array}{rcccccccc} & a_0 b_0 & + & a_0 b_1 x & + & a_0 b_2 x^2 & + & \underline{a_0 b_3 x^3} & + \ldots \\ + & a_1 b_0 x & + & a_1 b_1 x^2 & + & \underline{a_1 b_2 x^3} & + & a_1 b_3 x^4 & + \ldots \\ + & a_2 b_0 x^2 & + & \underline{a_2 b_1 x^3} & + & a_2 b_2 x^4 & + & a_2 b_3 x^5 & + \ldots \\ + & \underline{a_3 b_0 x^3} & + & a_3 b_1 x^4 & + & a_3 b_2 x^5 & + & a_3 b_3 x^6 & + \ldots \end{array}$$

Szeregi formalne ze zdefiniowanymi działaniami tworzą pierścień. Liczymy w nim podobnie jak na wielomianach (w pierścieniu wielomianów). W przeciwieństwie do pierścienia wielomianów jest w nim „dużo" elementów odwracalnych. W pierścieniu wielomianów nad dowolnym ciałem odwracalnymi są tylko wielomiany stopnia 0, czyli stałe $a_0 \neq 0$. W pierścieniu szeregów formalnych odwracalnymi są wszystkie szeregi z różnym od 0 wyrazem wolnym a_0, w szczególności wszystkie takie wielomiany.

1.3 Ważne wzory

Najważniejszym wzorem będzie następujący:

$$(1-x) \sum_{j=0}^{\infty} x^j = 1. \tag{2}$$

Łatwo go sprawdzić. Algebraicznie on mówi, że wielomian $1-x$ jest odwracalnym szeregiem formalnym, pozwala więc dzielić przez $1-x$, podaje też szereg odwrotny do $1-x$.

Z tego wzoru wynika kilka dalszych:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{j=0}^{\infty} x^j . \tag{3}$$

$$\frac{1}{1-ax} = \sum_{j=0}^{\infty} a^j x^j. \tag{4}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j x^{2j}. \tag{5}$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) x^j. \tag{6}$$

Można też wyprowadzić wzory na odwrotności dalszych potęg $1-x$, w szczególności

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)(j+2) x^j. \tag{7}$$

2 Równania rekurencyjne

2.1 Definicje rekurencyjne

Ciągi liczbowe bardzo często definiujemy rekurencyjnie. Najprostsze definicje rekurencyjne są postaci

$$a_0 = c \ \text{ oraz } \ a_{n+1} = F(a_n, n),$$

gdzie c jest dowolną liczbą, a F jest funkcją liczbową dwóch zmiennych. Oczywiście, druga równość w definicji zachodzi dla wszystkich możliwych liczb naturalnych. Przykładami takich definicji mogą być

$$a_0 = 0 \ \text{ oraz } \ a_{n+1} = a_n + n$$

oraz

$$a_0 = 2 \ \text{ oraz } \ a_{n+1} = a_n^2.$$

Bardziej skomplikowane mają postać

$$a_0 = c_0, a_1 = c_1, \ldots, a_{k-1} = c_{k-1} \ \ a \text{ oraz } \ a_{n+k} = F(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1}, n),$$

gdzie $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ są dowolnymi liczbami, a F jest funkcją liczbową $k+1$ zmiennych. Przykładem definicji tego rodzaju może być definicja ciągu Fibonacciego

$$a_0 = 0, \ a_1 = 1 \ \text{ oraz } \ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

Jeżeli dopuścimy stosowanie funkcji zależnych od ciągów liczb, to będziemy mogli stosować też definicje rekurencyjne postaci

$$a_n = F(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, n),$$

na przykład

$$a_n = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} a_i$$

lub

$$a_0 = 1 \text{ oraz } a_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

(z warunkową definicją F).

2.2 Ciągi definiowane przez liniową rekursję

W dalszym ciągu będą nas interesowały definicje za pomocą liniowej rekursji, a więc mające postać

$$a_0 = c_0, a_1 = c_1, \ldots, a_{k-1} = c_{k-1} \text{ oraz } a_{n+k} = u_0 a_n + u_1 a_{n+1} + \ldots + u_{k-1} a_{n+k-1}, \tag{8}$$

gdzie $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ oraz $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$ są dowolnymi liczbami.

Czasem będą nas interesowały nieco ogólniejsze definicje

$$a_0 = c_0, a_1 = c_1, \ldots, a_{k-1} = c_{k-1} \ a \text{ oraz } a_{n+k} = u_0 a_n + u_1 a_{n+1} + \ldots + u_{k-1} a_{n+k-1} + g(n),$$

gdzie $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ oraz $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$ są dowolnymi liczbami, a g jest pewną funkcją.

Najpierw zauważmy, że ciąg $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ma liniową definicję rekurencyjną wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnych liczb $v_0, v_1, \ldots, v_k$ takich, że $v_k \neq 0$, dla wszystkich liczb naturalnych n zachodzą równości

$$\sum_{i=0}^{k} v_i a_{n+i} = 0. \tag{9}$$

Aby się o tym przekonać w przypadku, gdy ciąg $a_0, a_1, a_2, \ldots$ jest definiowany za pomocą liniowej rekursji postaci (8), możemy przyjąć, że

$$v_i = u_i \text{ dla } i < k \text{ oraz } v_k = -1.$$

Odwrotnie, mając liczby v_i takie, jak wyżej, to ciąg $a_0, a_1, a_2, \ldots$ spełnia liniowe równanie rekurencyjne postaci

$$a_{n+k} = -\frac{v_0}{v_k} a_n - \frac{v_1}{v_k} a_{n+1} - \ldots - \frac{v_{k-1}}{v_k} a_{n+k-1}.$$

Zachodzi te następujący lemat z dość oczywistym dowodem

Lemat 2.1 *Przyjmijmy, że mamy liczby $v_0, v_1, \ldots, v_k$ takie, że $v_k \neq 0$ oraz wielomiany*

$$v(x) = \sum_{i=0}^{k} v_i x^i \quad \textit{oraz} \quad v^{rev}(x) = \sum_{i=0}^{k} v_{k-i} x^i.$$

Niech f będzie funkcją tworzącą ciągu $a_0, a_1, a_2, \ldots$ Wtedy następujące warunki są równoważne

1) $\sum_{i=0}^{k} v_i a_{n+i} = 0$ dla wszystkich $n \in N$ (a więc ciąg $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ma liniową definicję rekurencyjną), *2)* $v^{rev}(x) \cdot f(x)$ *jest wielomianem stopnia mniejszego niż* k*,*

3) $f(x) = \dfrac{g(x)}{v^{rev}(x)}$ *dla pewnego wielomianu* $g(x)$ *stopnia mniejszego niż* k*.* $\square$

O wielomianie $v(x) = \sum_{i=0}^{k} v_i x^i$ spełniającym warunek 1) z powyższego lematu, czyli równości (9), mówimy, że anihiluje ciąg $a_0, a_1, a_2, \ldots$

2.3 Operacja *rev*

Operacja *rev* wielomianowi

$$v(x) = \sum_{i=0}^{k} v_i x^i$$

stopnia k przyporządkowuje wielomian

$$v^{rev}(x) = \sum_{i=0}^{k} v_{k-i} x^i.$$

Definicja ta sprawia trochę kłopotów formalnych. W rzeczywistości powinna być definicją z parametrem k. Mniej kłopotów sprawia dla wielomianów, dla których dodatkowo wyrazy wolne są różne od zera. Wtedy bowiem wielomian $v^{rev}(x)$ też jest stopnia k.

Zauważmy, że operacja *rev* ma następujące własności

1) $v^{rev}(x) = x^k v(\frac{1}{x})$ oraz $v(x) = x^k v^{rev}(\frac{1}{x})$,

2) $(v^{rev})^{rev}(x) = v(x)$,

3) $(v \cdot w)^{rev}(x) = (v^{rev} \cdot w^{rev})(x)$.

4) $(v + w)^{rev}(x) = (v^{rev} + w^{rev})(x)$.

2.4 Wielomiany anihilujące

Przypomnijmy najpierw, że z lematu 2.1 wynika, że wielomian $v(x)$ stopnia k anihiluje ciąg $a_0, a_1, a_2, \ldots$ wtedy i tylko wtedy, gdy iloczyn $v^{rev}(x) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ jest stopnia mniejszego niż k. Nietrudno stąd wywnioskować dwa fakty:

1) suma wielomianów anihilujących ciąg $a_0, a_1, a_2, \ldots$ też anihiluje ten ciąg,

2) także iloczyn wielomianu anihilującego ciąg $a_0, a_1, a_2, \ldots$ i dowolnego innego wielomianu anihiluje ten ciąg.

Algebraicy zbiór wielomianów o podanych własnościach nazywają ideałem (w pierścieniu wielomianów). Łatwo pokazać, że niezerowy element ideału, minimalnego stopnia, dzieli każdy inny element ideału. Jeżeli dodatkowo przyjmiemy, że ma współczynnik 1 przy najwyższej potędze, to będzie on wyznaczony jednoznacznie. Taki wielomian w ideale wielomianów anihilujących nazywamy anihilatorem.

Nietrudno zauważyć, że wielomian stały 1, stopnia 0, jest anihilatorem ciągu $0, 0, 0, \ldots$ stale równego 0. Wielomian $x - 1$ jest anihilatorem każdego ciągu stałego $c, c, c, \ldots$ o wyrazach różnych od 0. W końcu, wielomian $x - a$ jest anihilatorem ciągów $c, ca, ca^2, ca^3, \ldots$, gdzie c jest liczbą różną od 0.

2.5 Ciągi cykliczne

Zajmiemy się teraz ciągami cyklicznymi, a więc postaci

$$c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}, c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}, c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}, \ldots$$

taki ciąg można definiować rekurencyjnie przyjmując

$$a_0 = c_0, a_1 = c_1, \ldots, a_{k-1} = c_{k-1} \text{ oraz } a_{n+k} = a_n.$$

Funkcja tworząca takiego ciągu jest postaci

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = \sum_{j=0} (c_0 + c_1 x + \ldots + c_{k-1} x^{k-1}) x^{kj} = \frac{c_0 + c_1 x + \ldots + c_{k-1} x^{k-1}}{1 - x^k}.$$

Mamy więc następujący fakt:

Lemat 2.2 *Ciąg $a_0, a_1, a_2, \ldots$ jest cykliczny i powtarza się w nim cyklicznie k wyrazów wtedy i tylko wtedy, gdy jednym z wielomianów anihilujących tego ciągu jest $x^k - 1$.* $\Box$

Na przykład ciąg definiowany wzorami

$$a_0 = 1, a_1 = 2 \text{ oraz } a_{n+2} = -a_{n+1} - a_n$$

ma anihilator $x^2 + x + 1$. Wobec tego, jednym z wielomianów anihilujących ten ciąg jest $x^3 - 1$. Widać, że jest to ciąg

$$1, 2, -3, 1, 2, -3, 1, 2, -3, \ldots.$$

Funkcja tworząca tego jest równa

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = \frac{1 + 2x - 3x^2}{1 - x^3} = \frac{(1 - x)(3x + 1)}{1 - x^3} = \frac{3x + 1}{x^2 + x + 1}.$$

2.6 Pewna własność wielomianów anihilujących

Lemat 2.3 *Przypuśćmy, że wielomian anihilujący* $v(x)$ *ciągu* $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *jest iloczynem dwóch względnie pierwszych wielomianów* $v_1(x)$ *i* $v_2(x)$*. Wtedy istnieją ciągi* $b_0, b_1, b_2, \ldots$ *oraz* $c_0, c_1, c_2, \ldots$ *anihilowane odpowiednio przez wielomiany* $v_1(x)$ *oraz* $v_2(x)$ *takie, że*

$$a_i = b_i + c_i$$

dla wszystkich naturalnych i*.*

Weźmy na przykład ciąg definiowany wzorami

$$a_0 = 2, a_1 = 5 \text{ oraz } a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n.$$

Anihilatorem tego równania rekurencyjnego jest wielomian

$$v(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3).$$

Istnieją więc ciąg $b_0, b_1, b_2, \ldots$ anihilowany przez wielomian $x-2$ oraz ciąg $c_0, c_1, c_2, \ldots$ anihilowany przez $x-3$ takie, że $a_i = b_i + c_i$. Wiemy już, że ciąg anihilowany przez $x-2$ jest postaci $b, b\cdot 2, b\cdot 2^2, \ldots$ i ogólnie $b_i = b \cdot 2^i$. Podobnie, $c_i = c \cdot 3^i$. Stąd $a_i = b \cdot 2^i + c \cdot 3^i$. W szczególności,

$$2 = a_0 = b + c \text{ oraz } 5 = a_1 = 2b + 3c.$$

Nietrudno zauważyć, że $b = c = 1$ oraz $a_i = 2^i + 3^i$.

2.7 Trochę o wyrażeniach wymiernych

Jedna z metod uzasadniania lematu z poprzedniego rozdziału korzysta z własności wyrażeń wymiernych wykorzystywanych rownież w rachunku całkowym.

Tzw. zasadnicze twierdzenie algebry stwierdza, że dla dowolny wielomian $w(x)$ o współczynnikach rzeczywistych (a także zespolonych) daje się przedstawić w postaci

$$w(x) = a(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$$

dla pewnych liczb zespolonych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (są to pierwiastki wielomianu $w(x)$). Z tego wynika, że każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych daje się przedstawić w postaci

$$w(x) = a(x-a_1)\ldots(x-a_m)(x^2+b_1x+c_1)\ldots(x^2+b_kx+c_k),$$

gdzie $a, a_i, b_i, c_i \in R$ oraz $b_i^2 - 4c_i < 0$. Oczywiście, w tych przedstawieniach poszczególne czynniki mogą się powtarzać kilkakrotnie.

Wielomiany $x - a$ zawsze są nierozkładalne, czyli nie dają się przedstawić w postaci iloczynu wielomianów mniejszego, ale dodatniego stopnia. W liczbach zespolonych są to jedyne wielomiany nierozkładalne (w zasadzie, jeżeli nie rozważamy wielomianów $dx - a$ z różnym od 1 współczynnikiem przy najwyższej potędze x). W liczbach rzeczywistych nierozkładalnymi są także wielomiany x^2+bx+c o współczynnikach takich, że $\Delta = b^2-4c < 0$. Dowolne dwie potęgi różnych wielomianów nierozkładalnych są względnie pierwsze, a więc nie mają wspólnego dzielnika będącego wielomianem dodatniego stopnia. Największy wspólny dzielnik wielomianów można znaleźć używając algorytmu Euklidesa.

Przypuśćmy, że mamy funkcję wymierną (czyli iloraz wielomianów)

$$\frac{w(x)}{v_1(x)v_2(x)v_3(x)\dots}$$

taką, że wielomiany $v_1(x), v_2(x), v_3(x), \dots$ są parami względnie pierwsze. Wtedy $1 = u_2(x)v_1(x) + u_1(x)[v_2(x)v_3(x)\dots]$ dla pewnych wielomianów $u_1(x), u_2(x)$ oraz

$$\frac{w(x)}{v_1(x)v_2(x)v_3(x)\dots} = \frac{w(x)u_1(x)}{v_1(x)} + \frac{w(x)u_2(x)}{v_2(x)v_3(x)\dots},$$

a po kilkakrotnym wykonaniu takich przekształceń:

$$\frac{w(x)}{v_1(x)v_2(x)v_3(x)\dots} = \frac{w(x)u_1(x)}{v_1(x)} + \frac{w(x)u_2'(x)}{v_2(x)} + \frac{w(x)u_3'(x)}{v_3(x)} + \dots$$

Stąd wynika, że dla liczb zespolonych każda funkcja wymierna daje się przekształcić do postaci

$$\frac{w(x)}{v(x)} = \frac{w(x)}{(x-a)^k(x-b)^l\dots} = \frac{u_1(x)}{(x-a)^k} + \frac{u_2(x)}{(x-b)^l} + \dots.$$

Ten sam wzór będzie słuszny dla liczb rzeczwistych pod warunkiem, że wielomian $v(x)$ będzie iloczynem jednomianów. Ogólny wzór dla liczb rzeczywistych ma postać

$$\frac{w(x)}{v(x)} = \frac{w(x)}{(x-a)^k(x^2+bx+c)^l\dots} = \frac{u_1(x)}{(x-a)^k} + \frac{u_2(x)}{(x^2+bx+c)^l} + \dots.$$

Mając funkcję wymierną z potęgą w mianowniku możemy przekształcać ją w następujący sposób:

$$\frac{w(x)}{v^k(x)} = \frac{w_{k-1}(x)v(x) + r_k(x)}{v^k(x)} = \frac{w_{k-1}(x)}{v^{k-1}(x)} + \frac{r_k(x)}{v^k(x)},$$

gdzie $r_k(x)$ jest resztą z dzielenia $w(x)$ przez $v(x)$. Powtarzając to przekształcenie otrzymujemy wzór

$$\frac{w(x)}{v^k(x)} = \frac{w_{k-1}(x)}{v^{k-1}(x)} + \frac{r_k(x)}{v^k(x)} = \dots = w_0(x) + \frac{r_1(x)}{v(x)} + \dots + \frac{r_k(x)}{v^k(x)},$$

w którym wielomiany $r_i(x)$ są stopnia mniejszego od stopnia $v(x)$.

Łącząc oba omówione sposoby przkształcania wyrażeń wymiernych otrzymujemy, że jeżeli wielomian $v(x)$ jest iloczynem jednomianów (a więc dowolnym wielomianem przy założeniu, że mamy prawo posługiwać się liczbami zespolonymi), to wyrażenie wymierne z wielomianem $v(x)$ w mianowniku można przekształcić do postaci

$$\frac{w(x)}{v(x)} = \frac{w(x)}{(x-a)^k(x-b)^l\ldots} = w_0(x) + \frac{A_1}{x-a} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{B_1}{x-b} + \ldots + \frac{B_l}{(x-b)^l} + \ldots \quad (10)$$

dla pewnych liczb $A_1, \ldots, A_k, B_1, \ldots, B_l, \ldots$. Jeżeli nie chcemy posługiwać się liczbami zespolonymi i wielomian $v(x)$ nie jest iloczynem rzeczywistych jednomianów, to funkcję wymierną można przekształcić do postaci

$$\begin{aligned} \frac{w(x)}{v(x)} &= \frac{w(x)}{(x-a)^k(x^2+bx+c)^l\ldots} = \\ &= w_0(x) + \frac{A_1}{x-a} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c} + \ldots + \frac{B_lx+C_l}{(x^2+bx+c)^l} + \ldots \end{aligned} \quad (11)$$

dla pewnych liczb $A_1, \ldots, A_k, B_1, \ldots, B_l, C_1, \ldots, C_l, \ldots$ Składniki prawych stron wzorów (10) i (11) nazywamy ułamkami prostymi.

Łatwo zauważyć, że jeżeli $w_0(x) \neq 0$, to we wzorach (10) i (11) stopnień wielomianu $w(x)$ będzie równy przynajmniej stopniowi $v(x)$. I odwrotnie, jeżeli stopień $w(x)$ będzie mniejszy niż stopień $v(x)$, to $w_0(x) = 0$.

Jest kilka metod szukania przedstawień wyrażeń wymiernych w postaci sumy ułamków prostych. Zawsze możemy przeprowadzić wyżej opisane przekształcenia. Możemy też lewe strony wzorów (10) lub (11) sprowadzić do najmniejszego wspólnego mianownika, Współczynniki otrzymanego w ten sposób licznika porównać ze współczynnikami wielomianu $w(x)$, a następnie z otrzymanego w ten sposób układu równań wyliczyć potrzebne liczby. W końcu, możemy we wzorach (10) lub (11) podstawić za x dostatecznie dużo, starannie dobranych wartości, umożliwiających poprawne i możliwie proste oblicznia, a potrzebne współczynniki wyliczamy z otrzymanych w ten sposób równań.

3 Zadanie 7 (lista 5)

Będziemy rozwiązywać następujące zadanie:

Zadanie 3.1 Jeżeli $a_n = n \bmod 3$, to spełnione następujące równości

$$a_{n+3} = a_n \text{ oraz } a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2.$$

Rozwiąż podane równanie rekurencyjne.

Metoda może jest zbyt skomplikowana.

3.1 Dwa wielomiany

W tym rozdziale będziemy zajmować się ogólnymi równaniami rekurencyjnymi postaci

$$a_{n+k} = v_{k-1}a_{n+k-1} + v_{k-2}a_{n+k-2} + \ldots + v_0 a_n, \tag{12}$$

gdzie $v_0 \neq 0$. Jest to chyba dostatecznie ogólna postać równań rekurencyjnych nazywanych jednorodnymi (liniowymi). Z takim równaniem można związać dwa wielomiany

$$w(x) = 1 - v_{k-1}x - v_{k-2}x^2 + \ldots - v_0 x^k \tag{13}$$

oraz

$$w^{rev}(x) = x^k - v_{k-1}x^{k-1} - v_{k-2}x^{k-2} + \ldots - v_0. \tag{14}$$

Dla Czytelników tego tekstu ważniejszy będzie wielomian (13). Będzie on nazywany wielomianem równania (związanym z równaniem) (12). W teorii zwykle za ważniejszy uważa się wielomian (14) i nazywa się go anihilatorem lub wielomianem charakterystycznym równania (12). Założyliśmy, że 0 nie jest pierwiastkiem żadnego z tych wielomianów.

Na definicję tych wielomianów można też patrzyć jak na definicję, która wielomianowi $w(x)$ przyporządkowuje wielomian $w^{rev}(x)$. Oczywiście, $(w^{rev})^{rev}(x) = w(x)$.

Ważnym zadaniem jest szukanie pierwiasków wielomianów, czyli szukanie przedstawień (w przypadku wielomianu (13)) postaci

$$w(x) = v_0 \prod_{i=0}^{k}(x - p_i).$$

Ze względu na wzór (4) dla nas ważniejsze będą przedstawienia w postaci

$$w(x) = \pm \prod_{i=0}^{k}(q_i x - 1).$$

Znając pierwiastki $w(x)$ łatwo znajdujemy przedstawienie tej postaci

$$w(x) = v_0 \prod_{i=0}^{k}(x - p_i) = \pm \prod_{i=0}^{k}(\frac{1}{p_i}x - 1).$$

Łatwo też zauważyć, że współczynniki q_i tego przedstawienia są dokładnie pierwiastkami wielomianu $w^{rev}(x)$. Jest to ważna własność anihilatora.

Z rozwiązywanym równaniem rekurencyjnym $a_{n+3} = a_n$ lub $a_{n+3} - a_n = 0$ wiążemy więc dwa wielomiany

$$1 - x^3 \tag{15}$$

oraz

$$x^3 - 1.$$

Pierwszy z wielomianów (czyli (15) w konkretnym przypadku) rozkłada się w następujący sposób

$$1 - x^3 = (1-x)(x^2+x+1) = (1-x)\left(x - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Widać, że iloczyn zespolonych pierwiastków tego wielomianu jest równy 1 (każdy z tych pierwiastków jest odwrotnością drugiego), a więc drugi z wielomianów ma prawie taki sam rozkład w postaci iloczynu. Wobec tego

$$1 - x^3 = (1-x)(x^2+x+1) = (1-x)\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x - 1\right)\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x - 1\right).$$

Zauważmy jeszcze, że wielomian (15) w rozwiązywanym zadaniu jest iloczynem parami różnych jednomianów. Jest to coś, co upraszcza nieco dalsze rozważania i powoduje, że ewentualne uogólnienia okażą się bardziej skomplikowane.

3.2 Funkcja tworząca jako suma ułamków prostych

Bierzemy ciąg $a_0, a_1, a_2, \ldots$ spełniający dla wszystkich $n \in N$ równość $a_{n+3} = a_n$ i funkcję tworzącą

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j.$$

Obliczmy iloczyn wielomianu[1] (15) i funkcji $f(x)$:

$$(1-x^3)f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j - \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+3} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \sum_{j=3}^{\infty} a_j x^j - \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+3} =$$

$$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \sum_{j=0}^{\infty} a_{j+3} x^{j+3} - \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+3} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

Stąd i z rozdziału 2.7 o wyrażeniach wymiernych otrzymujemy, że

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}{1 - x^3} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{x - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}} + \frac{C}{x - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}$$

dla pewnych A, B i C. Sposób obliczania liczb A, B i C został opisany we wspomnianym rozdziale.

[1] Wielomian ten został wskazany, ale można go też wyprowadzić w następujący sposób: $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \sum_{j=0}^{\infty} a_{j+3} x^{j+3} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + x^3 \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + x^3 f(x)$. Wielomian (15) znajdziemy po przeniesieniu wyrazów z $f(x)$ na jedną stronę równości i wyłączeniu tego wyrażenia.

3.3 Przekształcanie sum ułamków prostych w szereg

Teraz możemy skorzystać z wzoru (3) i sumę trzech ułamków prostych po drobnych przekształceniach zamienimy na sumę trzech szeregów formalnych. Zauważmy, że

$$\frac{B}{x-b} = \frac{-\frac{B}{b}}{1-\frac{x}{b}} = -\frac{B}{b}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{b}\right)^j x^j = -B\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{b}\right)^{j+1} x^j.$$

Wobec tego

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}{1-x^3} = \sum_{j=0}^{\infty}\left[A - B\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{j+1} - C\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{j+1}\right] x^j.$$

Porównując współczynniki szeregów po obu stronach równości otrzymujemy,że

$$a_n = A - B\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} - C\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}. \tag{16}$$

Przy okazji zauważmy, że nie tylko rozwiązaliśmy interesujące nas równanie (z dokładnością do ustalenie trzech współczynników), ale zrobiliśmy to ogólną metodą, którą można też stosować w innych przypadkach. Znaleźliśmy także ogólny sposób wyrażania rozwiązań takich równań za pomocą potęgowania.

3.4 Kolejny sposób znajdowania współczynników

Współczynniki A, B i C można też wyliczyć układu równań

$$\begin{aligned} a_0 &= A - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}B - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}C \\ a_1 &= A - \frac{(-1-i\sqrt{3})^2}{4}B - \frac{(-1+i\sqrt{3})^2}{4}C \\ a_2 &= A - \frac{(-1-i\sqrt{3})^3}{8}B - \frac{(-1+i\sqrt{3})^3}{8}C, \end{aligned} \tag{17}$$

czyli z wzorów (16) dla $n = 0, 1$ i 2.

Nietrudno zauważyć, że pojawiające się w tym równaniu współczynniki są zespolonymi pierwiastkami trzeciego stopnia z 1. Wiadomo też suma pierwiastów trzeciego stopnia z 1 jest równa 0. Te informacje pozwalają łatwo rozwiązać układ (17). Jest on równoważny układowi

$$\begin{aligned} a_0 &= A - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}B - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}C \\ a_1 &= A - \frac{(-1-i\sqrt{3})^2}{4}B - \frac{(-1+i\sqrt{3})^2}{4}C \\ a_2 &= A - B - C. \end{aligned}$$

Sumując te trzy równania wyliczamy, że

$$A = \frac{a_0 + a_1 + a_2}{3} = 1.$$

Teraz z ostatniego równania otrzymujemy, że $B + C = -1$. Mnożąc drugie równanie przez $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ dostajemy, że $B = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}C$. Stąd $C = \frac{-2}{3-i\sqrt{3}} = \frac{-3-i\sqrt{3}}{6}$ oraz $B = \frac{-3+i\sqrt{3}}{6}$. Tak więc

$$a_n = 1 + \frac{3 - i\sqrt{3}}{6}\left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} + \frac{3 + i\sqrt{3}}{6}\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} \tag{18}$$

albo po drobnych przekształceniach

$$a_n = 1 + \frac{i\sqrt{3}}{3}\left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+2} - \frac{i\sqrt{3}}{3}\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+2}. \tag{19}$$

Zauważmy jeszcze, że oprócz rozwiązania zadania otrzymaliśmy coś dodatkowego. Z przedstawionego rozumowania wynika, że wzór (16) podaje ogólne rozwiązanie równania rekurencyjnego $a_{n+3} = a_n$. Dowolny ciąg spełniający tę równość dla wszystkich $n \in N$ daje się przedstawić w postaci (16) dla pewnych współczynników A, B i C. Zależność między początkowymi wyrazami ciągu $a_0, a_1, a_2, \ldots$ i współczynnikami podaje równanie (17). Widać, że wyznacznik macierzy głównej tego układu jest wyznacznikiem Vandermonde'a (kolumny zawierają kolejne potęgi parami różnych liczb), jest on różny od zera, a to powoduje, że dla dowolnych wyrazów wolnych równanie (17) ma dokładnie jedno rozwiązanie. Także odwrotnie, dla dowolnych współczynników wzór (16) definiuje ciąg spełniający równości $a_{n+3} = a_n$ z wyrazami początkowymi danymi wzorami (17).

3.5 Algorytm znajdowania rozwiązania równania rekurencyjnego

Przedstawione rozumowanie dowodzi pewnej zalgorytmizowanej metody rozwiązywania liniowych równań rekurencyjnych takich, jak w naszym zadaniu. Aby rozwiązać takie równanie wystarczy

Krok 1. anihilator (14) przyrównujemy do 0 i rozwiązujemy otrzymane równanie; w rozważanym zadaniu przypadkiem równanie to jest identyczne z (15), jego rozwiązaniami są liczby

$$p_1 = 1, \quad p_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{oraz} \quad p_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

aby rozumowanie było poprawne, wielomian (14) powinien być iloczynem jednomianów o różnych pierwiastkach;

Krok 2. bierzemy ciąg

$$a_n = Ap_1^n + Bp_2^n + Cp_3^n = A + B\left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^n + C\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^n;$$

Krok 3. układamy i rozwiązujemy równania analogiczne do (17).

4 Zadanie 6 (c)

Znajdź rozwiązanie równania

$$a_{n+2} = 2^{n+1} - a_{n+1} - a_n \tag{20}$$

takie, że $a_0 = 1$ i $a_1 = 1$.

4.1 Pierwsze podejście

Może zamiast ciągu a_n szukać ciągu $b_n = \frac{a_n}{2^n}$. Ten drugi ciąg powinien spełniać równanie

$$b_{n+2} = \frac{2^{n+1} - a_{n+1} - a_n}{2^{n+2}} = \frac{1}{2} - \frac{b_{n+1}}{2} - \frac{b_n}{4},$$

które wydaje się prostsze, i warunki początkowe $b_0 = 1$ oraz $b_1 = \frac{1}{2}$. Jeżeli znajdziemy taki ciąg, to ciąg $a_n = 2^n b_n$ będzie rozwiązaniem naszego zadania. Ten pomysł wykorzystuje szczególne własności wyrażenia 2^n i mało istotnie upraszcza wyjściowe równanie (zastępuje 2^n przez stałą).

4.2 Kolejne spostrzeżenie

Rozważmy równanie rekurencyjne

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n + g(n) + h(n) \tag{21}$$

z jakimiś warunkami na a_0 i a_1. Liczba składników obu rodzajów po prawej stronie równania może być inna, dla ustalenia uwagi i uproszczenia wzięliśmy po dwa składniki, g i h oznaczają dowolne funkcje.

Z tym równaniem można związać trzy inne:

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n + g(n) \tag{22}$$

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n + h(n) \tag{23}$$

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n \tag{24}$$

(w pierwszych równaniach bierzemy po jednej funkcji). W dalszym ciągu A_n będzie oznaczać n-ty wyraz pewnego rozwiązania równania (24), G_n – równania (22), a H_n – równania (23).

Bez trudu dowodzi się, że każdy ciąg o wyrazach

$$A_n + G_n + H_n$$

spełnia równanie (21). Wobec tego, jeżeli weźmiemy jakiekolwiek rozwiązania równań (22) i (23), i znajdziemy rozwiązanie równania (24) spełniające warunki

$$A_0 = a_0 - G_0 - H_0 \text{ oraz } A_1 = a_1 - G_1 - H_1,$$

to suma tych trzech rozwiązań będzie szukanym rozwiązaniem równania (21).

4.3 Zastosowanie spostrzeżenia

Najpierw zauważmy, że ciąg

$$b_n = \frac{2}{7}2^n$$

spełnia równanie (20).

Wobec tego, aby rozwiązać to równanie powinniśmy jeszcze znaleźć rozwiązanie równania

$$c_{n+2} + c_{n+1} + c_n = 0$$

spełniające warunki $c_0 = \frac{5}{7}$ i $c_1 = \frac{3}{7}$.

Zgodnie z metodą z rozdziału 3.5, aby znaleźć interesujący nas ciąg, rozwiązujemy równanie

$$1 + x + x^2 = 0.$$

Pierwiastkami tego równania są liczby

$$p_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \quad \text{oraz} \quad p_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Ogólne rozwiązanie równania (20) ma postać

$$c_n = Ap_2^n + Bp_3^n = A\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + B\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n.$$

Współczynniki A i B spełniają równania

$$\begin{aligned} \frac{5}{7} &= A + B \\ \frac{3}{7} &= \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}A + \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}B \end{aligned}$$

Wobec tego

$$\frac{11}{14} = \frac{i\sqrt{3}}{2}A - \frac{i\sqrt{3}}{2}B$$

oraz

$$i\frac{11\sqrt{3}}{21} = -A + B$$

Ostatecznie

$$A = \frac{15 - i11\sqrt{3}}{42} \quad \text{oraz} \quad B = \frac{15 + i11\sqrt{3}}{42},$$

a także

$$c_n = \frac{15 - i11\sqrt{3}}{42}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \frac{15 + i11\sqrt{3}}{42}\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n.$$

W końcu rozwiązanie zadania 6 (c) jest dane wzorem

$$a_n = b_n + c_n = \frac{2^{n+1}}{7} + \frac{15 - i11\sqrt{3}}{42}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \frac{15 + i11\sqrt{3}}{42}\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n.$$

Wielomian x^2+x+1 jest nam już znany, wiemy w szczególności, że $(x^2+x+1)(x-1) = x^3-1$, Stąd pierwiastki p_2 i p_3 tego wielomianu są pierwiastkami trzeciego stopnia z jedności, czyli $p_2^3 = p_3^3 = 1$. Stąd wynika, że ciągi o wyrazach p_2^n, p_3^n oraz c_n przyjmują cyklicznie trzy wartości. Dla tego ostatniego ciągu wynika to również z następujących przekształceń:

$$c_{n+3} = -c_{n+2} - c_{n+1} = c_{n+1} + c_n - c_{n+1} = c_n.$$

Gdyby to zauważyć, to łatwo znaleźć rozwiązanie zadania 6(c) wyrażone za pomocą definicji warunkowej:

$$c_n = \begin{cases} \frac{5}{7} & \text{gdy } n \equiv 0 \bmod 3, \\ \frac{3}{7} & \text{gdy } n \equiv 1 \bmod 3, \\ \frac{-8}{7} & \text{gdy } n \equiv 2 \bmod 3 \end{cases} \quad \text{oraz } a_n = \begin{cases} \frac{5+2^{n+1}}{7} & \text{gdy } n \equiv 0 \bmod 3, \\ \frac{3+2^{n+1}}{7} & \text{gdy } n \equiv 1 \bmod 3, \\ \frac{-8+2^{n+1}}{7} & \text{gdy } n \equiv 2 \bmod 3. \end{cases}$$

Przedstawione rozwiązanie ma jeden niejasny element: skąd wziął się ciąg $b_0, b_1, \ldots$ Nie wiadomo, jak można go znaleźć i w jakich sytuacjach taki ciąg istnieje.

4.4 Inne rozwiązanie

Spróbujemy teraz zastosować do rozwiązania zadania 6(c) rozumowanie podobne do wykorzystanego w zadaniu 7. Weźmy dowolny ciąg $a_0, a_1, a_2, \ldots$ spełniający równanie (20), i funkcję tworzącą $f(x)$ tego ciągu. Zauważmy, że

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j = a_0 + a_1 x + \sum_{j=0}^{\infty} a_{j+2} x^{j+2} = a_0 + a_1 x + \sum_{j=0}^{\infty} (2^{j+1} - a_{j+1} - a_j) x^{j+2} =$$

$$a_0 + a_1 x + \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j+1} x^{j+2} - x \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j + a_0 x - x^2 \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j = a_0 + a_1 x + a_0 x + \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j+1} x^{j+2} - x f(x) - x^2 f(x).$$

Po przeniesieniu wyrażeń z $f(x)$ na drugą stronę otrzymujemy

$$(1 + x + x^2) f(x) = a_0 + a_1 x + a_0 x + \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j+1} x^{j+2}.$$

Teraz szereg w tym wzorze zastępujemy funkcją wymierną

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^{j+1} x^{j+2} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j+2} x^{j+2} - \frac{1}{2} - x = \frac{1}{2(1-2x)} - \frac{1}{2} - x.$$

Po kilku przekształceniach otrzymujemy

$$f(x) = \frac{(2a_0 - 1 + 2(a_1 - 1 + a_0)x}{2(1 + x + x^2)} + \frac{1}{2(1 - 2x)(1 + x + x^2)}.$$

Rozkładając drugi składnik prawej strony powyższego wzoru na sumę ułamków prostych dostajemy

$$\frac{1}{2(1 - 2x)(1 + x + x^2)} = \frac{2}{7(1 - 2x)} + \frac{2x + 3}{14(1 + x + x^2)}.$$

Stąd, po podstawieniu danych wartości $a_0 = 1$ i $a_1 = 1$, otrzymujemy

$$f(x) = \frac{5 + 8x}{7(1 + x + x^2)} + \frac{2}{7(1 - 2x)} = \frac{5 + 8x}{7(1 + x + x^2)} + \frac{2}{7} \sum_{j=0}^{\infty} 2^j x^j.$$

Wystarczy jeszcze znaleźć ciąg $c_0, c_1, c_2, \ldots$ taki, że

$$\frac{5 + 8x}{7(1 + x + x^2)} = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j = f_1(x).$$

Do znalezienia tego ciągu wykorzystamy rzadki fakt, że $x^2 + x + 1$ dzieli $x^3 - 1$. Wobec tego pierwiastki tego pierwszego wielomianu są pierwiastkami trzeciego stopnia z 1 i w konsekwecji ciąg $c_0, c_1, c_2, \ldots$ składa się z powtarzających się cyklicznie jego trzech pierwszych wyrazów. Wystarczy więc wyliczyć c_0, c_1 i c_2. Nietrudno zauważyć, że $c_0 = f_1(0) = \frac{5}{7}$. Aby wyliczyć c_1, znajdujemy wartość dla $x = 0$ wyrażenia

$$\frac{f_1(x) - c_0}{x} = \frac{\frac{5 + 8x}{7(1 + x + x^2)} - \frac{5}{7}}{x} = \frac{-5x + 3}{7(x^2 + x + 1)}.$$

Stąd $c_1 = \frac{3}{7}$. Analogicznie znajdujemy $c_2 = \frac{-8}{7}$. Ciąg $c_0, c_1, c_2, \ldots$ jest więc ciągiem

$$\frac{5}{7}, \frac{3}{7}, \frac{-8}{7}, \frac{5}{7}, \frac{3}{7}, \frac{-8}{7}, \frac{5}{7}, \ldots$$

W ten sposób ponownie wykazaliśmy wzór z poprzedniego rozdziału podający rozwiązanie zadania.

4.5 Ogólne wnioski z przeprowadzonych rachunków

Chcemy rozwiązać równanie rekurencyjne

$$a_{n+3} = v_2 a_{n+2} + v_1 a_{n+1} + v_0 a_n + d_n \tag{25}$$

(równanie może mieć więcej lub mniej „rekurencyjnych” składników). O ciągu $d_0, d_1, d_2, \ldots$ będziemy zakładać, że jego funkcja tworząca

$$g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j x^j = \frac{p(x)}{q(x)}$$

daje się przedstawić w postaci wyrażenia wymiernego ($p(x)$ i $q(x)$ to wielomiany). Tak jest, jeżeli $d_n = c$ dla pewnej liczby c, $d_n = 2^n$, a nawet, z pewnymi zastrzeżeniami, dla $d_n = n$ i wielu innych.

Przyjmijmy, że $a_0, a_1, a_2, \ldots$ jest rozwiązaniem równania (25),

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$$

jest jego funkcją tworzącą, a

$$w(x) = x^3 - v_2 x^2 - v_1 x - v_0$$

jest wielomianem (15) odpowiadającego równania jednorodnego. Przekształcając $f(x)$ tak, jak w rozdziale 4.4, otrzymujemy równość

$$w(x)f(x) = u(x) + x^3 g(x) = u(x) + \frac{x^3 p(x)}{q(x)}$$

dla pewnego wielomianu $u(x)$. Stąd

$$f(x) = \frac{u(x)q(x) + x^3 p(x)}{w(x)q(x)}, \tag{26}$$

a gdy wielomiany $q(x)$ i $w(x)$ są względnie pierwsze, to także

$$f(x) = \frac{u(x) + p_1(x)}{w(x)} + \frac{p_2(x)}{q(x)} \tag{27}$$

Założenie o względnej pierwszości jest spełnione w rachunkach z rozdziału 4.4.

Wzór (26) pozwala znaleźć rozwiązanie równania (25), gdy znamy liczby a_0, a_1 i a_2. Mówi on, że szukany ciąg jest jednym z rozwiązań jednorodnego równania rekurencyjnego z wielomianem (13) równym iloczynowi $w(x)q(x)$. Jeżeli ten iloczyn nie dzieli się przez kwadrat żadnego jednomianu, to możemy skorzystać z metody opisanej w rozdziale 3.5. Do tego będzie potrzebny anihilator równania, czyli wielomian $(w(x)q(x))^{rev}$, który jest równy $w^{rev}(x)q^{rev}(x)$.

Natomiast wzór (27) dostarcza pewnej informacji o postaci rozwiązania równania (25). Jest ono sumą rozwiązania równania jednorodnego odpowiającego równaniu (25), o funkcji tworzącej $\frac{u(x)+p_1(x)}{w(x)}$ i rozwiązania równania (25) o funkcji tworzącej $\frac{p_2(x)}{q(x)}$. To rozwiązanie łatwo można znaleźć wiedząc, że stopień $p_2(x)$ jest mniejszy od stopnia $q(x)$.

W przypadku zadania 6(c) mamy $d_n = 2 \cdot 2^n$. Stąd $q(x) = 1 - 2x$, a $p_2(x)$ jest wielomianem stałym, np. równym c. Stąd wynika, że równanie z zadania 6(c) ma rozwiązanie o funkcji tworzącej $\frac{c}{1-2x}$, czyli rozwiązanie a_n postaci $c2^n$. Podstawiając to a_n do wzoru (20) dla $n = 0$ otrzymujemy, że na przykład

$$4c = 2 - 2c - c.$$

Stąd $c = \frac{2}{7}$ i ciąg o wyrazach $\frac{2}{7}2^n$ spełnia równanie (20). Fakt ten wykorzystaliśmy w rozdziale 4.3.

Analogicznie, jeżeli ciąg d_n jest stały, to pewien ciąg stały spełnia równanie 25 pod warunkiem, że liczba 1 nie jest pierwiastkiem wielomianu $w(x)$ (w tym przypadku mamy $q(x) = 1 - x$).