Matematyczne podstawy informatyki
Część I. Formalizacja logiki

Antoni Kościelski

24 listopada 2014

Spis treści

1 Wstęp

1.1 Kłopoty z analizą matematyczną

Analiza matematyczna jest jednym z podstawowych działów matematyki. Jest też działem, w którym posługujemy się zdaniami bardzo skomplikownymi pod względem budowy logicznej. W definicjach podstawowych pojęć z tej dziedziny często występują trzy zmiany kwantyfikatorów. Tak złożone zdania są już trudne do wypowiedzenia w języku naturalnym i powodują komplikacje natury logicznej.

Zwykle wykłady z analizy matematycznej zaczynają się od próby zdefiniowania liczb rzeczywistych. Najczęściej jednak nie zawierają ani definicji, ani choćby omówienia własności ważnych pojęć takich, jak funkcje i nieskończone ciągi. W XIX wieku pojawiły się wątpliwości, czy dowody twierdzeń oparte o intuicyjne własności ciągów nieskończonych są dostatecznie precyzyjne. Wątpliwości budziła w szczególności zasada wyborów zależnych, przypominająca definiowanie przez indukcję, pozwalająca określać ciąg nieskończony przez określenie jego n-tego wyrazu jako jednej z wielu liczb spełniających warunek zależny od wyrazów o indeksach mniejszych od n.

Wątpliwości te były uzasadnione. Zasada wyborów zależnych jest konsekwencją budzącego kontrowersje aksjomatu wyboru, ale nie wynika z pozostałych aksjomatów teorii mnogości. Jest potrzebna w dowodzie, że funkcje ciągłe w pewnym punkcie według Heinego są też ciągłe w tym punkcie w sensie Cauchy'ego. Po odrzuceniu zasady wyborów zalenych można konstruować funkcję świadczące o fałszywości przytoczonego twierdzenia.

Porządkowanie analizy matematycznej przyczyniło się do rozwoju logiki matematycznej i powstania teorii mnogości.

1.2 Początki teorii mnogości

Teoria mnogości stworzył George Cantor w ostatniej ćwierci XIX wieku. Teoria ta pozwala sformalizować niemal całą matematykę, w tym oczywiście pojęcia funkcji i ciągu nieskończonego. Umożliwia przedstawienie analizy matematycznej w sposób nie budzący formalnych wątpliwości.

Teorię mnogości Cantor uzupełnił o teorię mocy. Używając tej ostatniej teorii w 1874 roku dowiódł, że jest przeliczalnie wiele liczb algebraicznych i nieprzeliczalnie wiele przestępnych. Tak w nowy sposób rozwiązał problem istnienia liczb przestępnych i włączył się istotnie w badania prowadzone w drugiej połowie XIX wieku. Dzięki temu zwrócił uwagę współczesnych na teorię mnogości.

Teoria mnogości Cantora szybko okazała się sprzeczna (patrz przykład ze strony 11). Znaleziono w niej antynomie, czyli rozumowania dowodzące sprzeczności. Jedną z najprostszych została znaleziona przez Russela i wykorzystuje rozumowanie przekątniowe zastosowane po raz pierwszy w dowodzie twierdzenia Cantora o zbiorze potęgowym i mnogościowym dowodzie istnienia liczb przestępnych.

1.3 Metoda przekątniowa i zbiór potęgowy

Starożytni Grecy zauważyli, że o niektórych zdaniach nie da się rozstrzygnąć, czy są prawdziwe, czy też fałszywe. Tak jest na przykład z paradoksem kłamcy: nie wiadomo, czy ktokolwiek stwierdzając *Skłamałem* w tym momencie skłamał, czy też powiedział prawdę. Jeżeli skłamał, to stwierdzenie *Skłamałem* jest fałszywe, a więc jednak powiedział prawdę. Jeżeli powiedział prawdę, to stwierdzenie *Skłamałem* jest prawdziwe, a więc jednak skłamał. Podobnym przykładem jest komentowana w Biblii opinia Kreteńczyka Epimenidesa, który stwierdził, że *Wszyscy Kreteńczycy są kłamcami*. Fakt, że ta krytyczna opinia była pamiętana kilkaset lat po śmierci jej autora świadczy, że budziła zainteresowanie i dyskusje. Cechą charakterystyczną tych zdań jest to, że mówią coś o osobie, która je wypowiada.

Dobrym przykładem takich kłopotów są też takie dwa zdania:

1) *Następne zdanie jest prawdziwe.*

2) *Poprzednie zdanie jest fałszywe.*

Każde z nich pośrednio mówi coś o sobie i założenie o którymkolwiek, że jest prawdziwe bądź fałszywe, prowadzi do przeciwnego wniosku. Jeżeli o tych zdaniach można coś ustalić, to tylko to, że jednocześnie powinny być prawdziwe i fałszywe.

Cantor zaczął rozumieć paradoks kłamcy i zauważył, że stworzenie w matematyce sytuacji, gdy coś mówi coś o sobie, będzie prowadzić do sprzeczności. Wykorzystał to w dowodzie twierdzenia o zbiorze potęgowym.

Wyobraźmy sobie kwadratową tablicę wypełnioną zerami i jedynkami, na przykład taką oto:

a	b	c	d	e
0	1	0	0	1
1	**1**	0	1	0
1	0	**1**	1	0
1	1	0	**0**	1
0	0	0	0	**1**

Przyjmijmy, że kolejne kolumny tej tablicy odpowiadają kolejnym elementom ze zbioru $U = \{a, b, c, d, e\}$. Elementy wiersza tej tablicy możemy interpretować jako informacje o należeniu kolejnych elementów zbioru U do pewnego zbioru A. Pierwszy wiersz podanej tablicy opisuje więc zbiór $A = \{b, e\}$. Przekątna tablicy (wyróżniona pogrubionymi cyframi) zawiera ciąg $0, 1, 1, 0, 1$. W metodzie przekątniowej cyfry w tym ciągu zamienia się na przeciwne i tworzy się ciąg $1, 0, 0, 1, 0$ opisujący zbiór $X = \{a, d\}$.

Zbiór X ma szczególną własność: „mówi" coś (zawiera informacje) o każdym zbiorze opisanym w wierszu danej tablicy. Ponieważ pierwszy element U, czyli a, należy do X, więc a nie jest elementem zbioru A z pierwszego wiersza. Podobnie, do zbioru z drugiego wiersza należy b (drugi element U), gdyż element ten nie należy do X. Co więcej, zbiór X „mówi" o zbiorze z tablicy coś przeciwnego do swoich własności.

Stąd oczywiście wynika, że X jest nowym zbiorem, żaden wiersz naszej tablicy nie zawiera o nim informacji. Zbiór X bowiem i zbiór z n-tego wiersza różnią n-tym elementem. Taki wniosek zwykle wystarcza do przeprowadzenia rozumowania z użyciem metody przekątniowej.

Można jednak pomyśleć inaczej. Jeżeli założymy, że zbiór U ma najwyżej tyle podzbiorów, co elementów, to informacje o wszystkich podzbiorach U można umieścić w takiej tablicy. W ten sposób powstanie taka sytuacja, jak w paradoksie kłamcy: zbiór X dla takiej tablicy będzie „mówić" coś o sobie i to w tak, że nie da się ustalić prawdziwości tej informacji. Założenie o jej prawdziwości będzie implikować jej fałszywość i odwrotnie.

Wynikający stąd wniosek, że pięcioelementowy zbiór U ma więcej niż 5 podzbiorów, nie jest specjalnie ciekawy. Jeżeli jednak wyobrazimy sobie tablicę, której wiersze i kolumny są indeksowane liczbami naturalnymi i przeprowadzimy analogiczne rozumowanie, to przekonamy się, że zbiorów liczb naturalnych nie da się ponumerować liczbami naturalnymi. Ten rezultat jest znacznie ciekawszy od poprzedniego, a spostrzeżenie, że można porównywać „wwielkości" zbiorów nieskończonych było pod koniec XIX wieku odkryciem naukowym.

Łatwo można wyobrazić sobie tablicę indeksowaną liczbami naturalnymi. Kolejne kolumny i wiersze odpowiadają kolejnym liczbom naturalnym. Trudniej, gdy chcemy kolumny i wiersze tablicy indeksować dowolnym zbiorem U. Taką tablicę trudniej przedstawić na rysunku. Można ją utożsamiać z dwuargumentową funkcją $t : U \times U \to \{0, 1\}$. Taka zmiana sposobu myślenia pozwala dowieść twierdzenie Cantora o zbiorze potęgowym w pełnej ogólności, dla dowolnego zbioru U.

Można zrobić jeszcze jeden krok i zamiast tablicy indeksowanej elementami pewnego zbioru U można rozważać tablice indeksowane wszystkimi możliwymi elementami - zbiorami. Jedna z takich tablic na przecięciu kolumny odpowiadającej elementowi x i wiersza wyznaczonego przez y może mieć informację o prawdziwości stwierdzenia $x \in y$. Przekątna tej tablicy zawiera indeksowany wszystkimi możliwymi elementami x „ciąg" informacji, czy $x \in x$, metoda przekątniowa definiuje „ciąg" informacji przeciwnych $x \notin x$, opisujący zbiór $X = \{x : x \notin x\}$. Zbiór X o każdym zbiorze - elemencie x mówi, czy $x \in x$. Zawiera też taką informację o sobie. Podobnie, jak w paradoksie kłamcy, nie można więc rozstrzygnąć, czy $X \in X$. Obie możliwe hipotezy prowadzą do przeciwnego wniosku, a więc pozwalają dowieść sprzeczność. Rozumowanie to, zauważone przez Bertranda Russela, i – jak się wydawało – możliwe do przeprowadzenia w teorii mnogości Cantora jest znane pod nazwą antynomii bądź paradoksu Russela.

1.4 Teoria mnogości w XX wieku

W 1904 roku Ernst Zermelo poprawił teorię mnogości Cantora i zaproponował jej aksjomatyzację znaną pod nazwą teorii Zermelo. Teoria ta dzisiaj stanowi podstawę elementarnych wykładów, których celem jest nauka języka mnogościowego (mimo to studenci często nie poznają jej akjomatów). Teoria ta została uznana za zbyt słabą. Kilka osób, w tym Abraham Fraenkel (studiował na początku XX wieku we Wrocławiu) zaproponowało uzupełnienie jej o schemat zastępowania. W ten sposób powstała najczęściej stosowana teoria mnogości Zermelo - Fraenkla z aksjomatem wyboru.

W teorii Zermelo - Fraenkla nie można powtórzyć dowodów znanych antynomii i nikomu nie udało się wymyślić nowych.

1.5 Logika

Logiką interesowano się[1] od starożytności, często też łączono ją z retoryką. Matematycy w poważniejszym stopniu zajęli się logiką pod koniec XIX wieku. Pierwsze prace dotyczące kwantyfikatorów zostały napisane w Niemczech przez Gottloba Fregego (1879) i w Stanach Zjednoczonych przez Charlesa Sandersa Peirce'a (1885), być może niezależnie od siebie. Były związane (zwłaszcza prace Fregego) z logicyzmem, filozoficzną koncepcją, zgodnie z którą cała matematyka daje się sprowadzić do logiki, jest częścią logiki i nie wymaga żadnych specjalnych aksjomatów poza logicznymi. (zbiory to przecież własności, o własnościach jakoś mówimy i to powinno wystarczyć). Ta koncepcja dała niewiele ciekawych rezultatów, owocowała jednak w wiele prób stworzenia podstaw matematyki, często sprzecznych. Paradoksalnie, prowadziła do rozwoju teorii mnogości. Ważnym dziełem z tego nurtu są *Principia Mathematica*, napisane przez Bertranda Russella i Alfreda Whiteheada, kontynuatorów prac Fregego. Kurt Gödel odwoływał się do tego dzieła w swoich pracach. Zostało w nim wprowadzone pojęcie typu, które bywa uważane za pierwowzór informatycznego pojęcia typu.

Logiki była potrzebna również formalistom do ratowania teorii mnogości. Proces kształtowania współczesnych systemów logicznych trwał około 50 lat. Czasami przyjmuje się, że zakończył w 1928 roku się wraz z ukazaniem się książki *Grundzüge der theoretischen Logik* Davida Hilberta i Wilhelma Ackermanna.

1.6 Program Hilberta

Kłopoty z teorią mnogości doprowadziły do powstania opinii[2], że matematykę należy do ograniczyć do zagadnień nie budzących wątpliwości, w których pojęcie nieskończoności nie występuje, bądź odgrywa mniej istotną rolę. Teorię mnogości wziął w obronę Dawid Hilbert (główna praca pochodzi z 1926 roku) przy okazji przedstawiając swoje poglądy i wytyczając program badań. Stanowisko Hilberta i jego kontynuatorów (m. in. John von Neumann, Abraham Robinson i Haskell Curry) jest określane jako formalizm.

Zdaniem Hilberta matematyka zajmuje się konkretnymi symbolami, na przykład liczebnikami, które mogą być rozumiane jako ciągi znaków 1, 11, 111, ... Tak rozumiane liczby naturalne stanowią punkt wyjścia całej matematyki, mogą być badane bezpośrednio, a nasza wiedza o nich powinna być niesprzeczna. Pojęcie nieskończoności nie może być badane bezpośrednio, nie występuje w rzeczywistości. Aby móc badać nieskończoność, należy dotyczącą jej część matematyki sformalizować, oprzeć na takiej matematyce, która jest pewna. Następnie należy tę część zbadać pewnymi środkami, zwłaszcza wykazać jej niesprzeczność. Hilbert sądził też, że da się wykazać jej zupełność i okaże się ona zachowawcza, czyli da się sprowadzić do matematyki pewnej, i nie będzie istotnie poza nią wykraczać.

2 Formuły i podstawianie

Formuły są formułami pewnego języka. Język może być rozumiany jako zbiór symboli, których możemy używać. Wśród tych symboli znajdują kwantyfikatory ($\forall$ oraz $\exists$, oba lub jeden z nich), spójniki logiczne ($\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$ i $\Leftrightarrow$, wszystkie lub

[1] Trochę informacji historycznych o logice można znaleźć na przykład w *Zarysie logiki matematycznej* Andrzeja Grzegorczyka.

[2] Więcej informacji o poglądach matematyków na przełomie XIX i XX wieku znajduje się w książeczce Romana Murawskiego pod tytułem *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*.

niektóre z nich), symbole relacyjne i funkcyjne o określonej arności, a także stałe, które mogą być rozumiane jako symbole funkcyjne o arności 0. Szczególnym dwuargumentowym symbolem relacyjnym jest $=$, który bywa uważany symbol logiczny (wtedy mówimy o logice z równością). Wśród symboli są też zmienne, określane jako zmienne indywiduowe (dla odróżnienia np. od zmiennych zdaniowych). Oznaczają one elementy, o których mówią formuły. Poza wymienionymi, w formułach występują jeszcze symbole pomocniczne, na przykład nawiasy doprecyzowujące budowę formuły.

W faktycznie wykorzystywanych językach nie pojawiają się symboli relacyjnych o arności 0. Takie symbole można uważać za zmienne zdaniowe z rachunku zdań i można je rozważać w teoretycznych systemach logicznych obejmujących jednoczeście rachunek zdań i kwantyfikatorów.

Przykładem może być język arytmetyki. Występują w nim oprócz symboli logicznych i pomocniczych stałe 0 i 1, dwuargumentowe symbole funkcyjne $+$ i $\cdot$ i dwuargumentowe symbole relacyjne $=$ oraz $<$. Bywa w nim również umieszczany jednoargumentowy symbol funkcyjny S interpretowany jako operacja następnika.

W klasycznej logice z symboli języka tworzymy napisy, które mogą być interpretowane jako ciągi symboli (znaków) i używamy nawiasów by jednoznacznie opisać budowę napisu. W logice zinformatyzowanej zamiast napisów rozważa się drzewa etykietowane symbolami języka.

2.1 Termy

Termy to elementy zbioru termów. Zbiór termów jest najmniejszym zbiorem napisów,

1) do którego należą zmienne i stałe (napisy jednoelementowe złożone ze zmiennej lub stałej),

2) który spełnia warunek: jeżeli $t_1, \ldots, t_n$ są termami, a f jest n-arnym symbolem funkcyjnym, to $f(t_1, \ldots, t_n)$ też jest termem (należy do zbioru termów).

W zbiorze termów określamy operację podstawiania. Symbolem $t[x \leftarrow s]$ oznaczamy wynik podstawiania w termie t za zmienną x termu s. Przyjmujemy, że podstawianie ma następujące własności:

$$
\begin{array}{rcll}
c[x \leftarrow s] & = & s & \text{dla stałej } c \\
x[x \leftarrow s] & = & s & \\
y[x \leftarrow s] & = & y & \text{dla zmiennej } y \neq x \\
f(t_1, \ldots, t_n)[x \leftarrow s] & = & f(t_1[x \leftarrow s], \ldots, t_n[x \leftarrow s]). &
\end{array}
$$

2.2 Formuły

Formuły to elementy zbioru formuł. Zbiór formuł jest najmniejszym zbiorem napisów,

1) do którego należą formuły atomowe, a więc napisy $r(t_1, \ldots, t_n)$, gdzie r jest n-arnym symbolem relacyjnym, a $t_1, \ldots, t_n$ są termami,

2) i który spełnia warunki: jeżeli φ i ψ są formułami, to $\neg\varphi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \Rightarrow \psi$ oraz $\varphi \Leftrightarrow \psi$ też są formułami (należą do zbioru formuł),

3) jeżeli φ jest formułą, a x – zmienną, to $\forall x\, \varphi$ oraz $\exists x\, \varphi$ też są formułami.

Termy z symbolami takimi, jak $+$ oraz formuły atomowe z symbolami takimi, jak $<$ lub $=$, będziemy zapisywać w tradycyjny sposób.

Także w zbiorze formuł określamy operację podstawiania. Symbolem $\varphi[x \leftarrow s]$ oznaczamy wynik podstawiania w formule φ za zmienną x termu s. Przyjmujemy, że podstawianie spełnia następujące równości:

$$
\begin{array}{rcll}
r(t_1,\ldots,t_n)[x \leftarrow s] & = & r(t_1[x \leftarrow s],\ldots,t_n[x \leftarrow s]) & \text{dla symbolu relacyjnego } r, \\
(\neg\varphi)[x \leftarrow s] & = & \neg(\varphi[x \leftarrow s]) & \\
(\varphi \vee \psi)[x \leftarrow s] & = & \varphi[x \leftarrow s] \vee \psi[x \leftarrow s] & \text{i podobnie dla innych spójników,} \\
(\exists x\, \varphi)[x \leftarrow s] & = & \exists x\, \varphi & \\
(\exists y\, \varphi)[x \leftarrow s] & = & \exists y\, \varphi[x \leftarrow s] & \text{gdy } y \neq x \\
 & & & \text{i podobnie dla kwantyfikatora } \forall.
\end{array}
$$

2.3 Reguły wnioskowania (dowodzenia)

Większość systemów logicznych posługuje się pewnym zbiorem reguł dowodzenia. Reguły te oddają najbardziej elementarne i uznawane za oczywiste sposoby wnioskowania. W pewnym sensie definiują spójniki logiczne oraz kwantyfikatory.

Przykładem reguły dowodzenia jest reguła odrywania (RO):

$$\frac{\varphi \Rightarrow \psi, \varphi}{\psi}.$$

Reguły dowodzenia zapisujemy używając poziomej kreski. Nad kreską piszemy kilka formuł zwanych przesłankami. Pod kreską znajduje się jedna formuła zwana wnioskiem uzyskanym za pomocą tej reguły ze znajdujących się w niej przesłanek. Reguły dowodzenia rozumiemy jako schematy wnioskowań. W przypadku reguły odrywania oznacza to, że z dwóch formuł: z implikacji i jej poprzednika zawsze możemy wywnioskować następnik implikacji (a więc za φ i ψ możemy podstawić w regule odrywania jakiekolwiek formuły). W niektórych sytuacjach reguły dowodzenia są stosowane z pewnymi ograniczeniami.

Dalej przedstawimy trzy systemy logiczne: system dowodów założeniowych oraz systemy z książki Schoefielda i pracy Gödla. System dowodów założeniowych jest najbardziej naturalną formalizacją rachunku logicznego, odpowiada powszechnie stosowanym zasadom przedstawiania dowodów.

2.4 Reguły wnioskowania z pewnego systemu

Szczególnie prosty system logiczny jest wykorzystywany w monografii *Mathematical Logic* napisanej przez Josepha Schoenfielda. W tym systemie posługujemy się dwoma spójnikami $\vee$ oraz $\neg$ i kwantyfikatorem $\exists$. Formułę zapisaną z użyciem innych spójników uważamy za skrót i najpierw przekształcamy po to, by wyeliminować z niej niewłaściwe znaki. System Schoenfielda zawiera następujące reguły dowodzenia:

$$\frac{\psi}{\varphi \vee \psi}, \quad \frac{\varphi \vee \varphi}{\varphi}, \quad \frac{\varphi \vee (\psi \vee \xi)}{(\varphi \vee \psi) \vee \xi}, \quad \frac{\varphi \vee \psi,\ \neg\varphi \vee \xi}{\psi \vee \xi}, \quad \frac{\varphi \Rightarrow \psi}{(\exists x\varphi) \Rightarrow \psi},$$

z tym, że ostatnią stosujemy tylko wtedy, gdy zmienna x nie występuje jako wolna w ψ (patrz rozdział 3.5.1).

3 Pojęcie dowodu i twierdzenia

3.1 Podstawowa idea

Dowodem najczęściej nazywamy ciąg formuł $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ taki, że każda z formuł jest albo aksjomatem, albo wnioskiem otrzymanym z formuł wcześniejszych za pomocą jednej z reguł dowodzenia.

Twierdzeniami nazywamy formuły występujące w dowodach. Dowód jest dowodem formuły φ, jeżeli φ jest jedną z formuł w nim występujących. Pojęcia te zależą jeszcze od przyjmowanych aksjomatów.

Napis $\vdash \varphi$ będzie oznaczać, że formuła φ jest twierdzeniem (rozważanego) systemu logicznego, dowiedzionym bez korzystania z aksjomatów pozalogicznych. Tak rozumiane twierdzenia nazywa się także prawami logicznymi, prawami rachunku kwantyfikatorów, bądź tezami tego rachunku. Dla omawianych tutaj systemów dowodzi się, że pojęcie prawa logicznego nie zależy od systemu. Z tego powodu symbol $\vdash$ można uznać za dostatecznie precyzyjny.

Zbiór twierdzeń można też zdefiniować jako najmniejszy zbiór formuł zawierający aksjomaty i zamknięty ze względu na reguły wnioskowania (czyli spełniający następujący warunek: jeżeli przesłanki należą do zbioru twierdzeń, to także wnioski otrzymane za pomocą reguł wnioskowania należą do zbioru twierdzeń).

3.2 Aksjomaty logiczne

Rozróżniamy trzy rodzaje aksjomatów: logiczne, równości i pozalogiczne. Aksjomaty logiczne są częścią definicji systemu logicznego. Można je uważać za specjalne reguły dowodzenia, nie wymagające przesłanek.

W systemie Schoenfielda przyjmuje się, że aksjomatami są wszelkie formuły następujących postaci:

$$\neg\varphi \vee \varphi, \quad \varphi[x \leftarrow t] \Rightarrow \exists x \varphi.$$

3.3 Aksjomaty równości

W większości teorii posługujemy się pojęciem równości, które jest oznaczane znanym symbolem $=$ i często jest uważana za jedno z pojęć logicznych. Wtedy do przyjmowanych aksjomatów dołączamy aksjomaty równością. Aksjomaty te wyrażają własności relacji równości. Są nimi następujące formuły

$$x = x,$$

$$x_1 = y_1 \Rightarrow (\ldots \Rightarrow (x_n = y_n \Rightarrow (f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)))\ldots),$$
$$x_1 = y_1 \Rightarrow (\ldots \Rightarrow (x_n = y_n \Rightarrow (p(x_1, \ldots, x_n) \Rightarrow p(y_1, \ldots, y_n)))\ldots).$$

utworzone dla dowolnego n-arnego symbolu funkcyjnego f i dowolnego n-arnego symbolu relacyjnego p.

3.4 Teorie i aksjomaty pozalogiczne

Teorią nazywamy dowolny zbiór formuł, zapisany w ustalonym języku, przy użyciu symboli funkcyjnych i relacyjnych oraz stałych tego języka. Formuły z tego zbioru nazywamy aksjomatami (rozważanej teorii). Te aksjomaty są określane jako pozalogiczne, w odróżnieniu od aksjomatów logicznych i równości. Tworząc dowód w pewnej teorii w możemy nim umieszczać wszelkie jej aksjomaty, logiczne i pozalogiczne, a dla teorii z równością – także aksjomaty równości. Formuły, które mają dowód wykorzystujący aksjomaty teorii T nazywamy twierdzeniami tej teorii. Aby wyrazić fakt, że φ jest twierdzeniem teorii T, będziemy pisać $T \vdash \varphi$.

3.5 Szczegóły związane z pojęciem systemu logicznego

Przedstawione definicje zawierają luki, których wypełnienie wymaga wprowadzenia kilku drobnych pojęć.

3.5.1 Zasięg kwantyfikatora, zmienne wolne i związane

Nietrudno zauważyć, że w każdej formule po każdym kwantyfikatorze (znaku $\forall$ lub $\exists$) znajduje się zmienna. Jeżeli po pewnym kwatyfikatorze znajduje się zmienna x, to o tym kwantyfikatorze mówimy, że wiąże zmienną x.

Zasięgiem kwantyfikatora (czyli znaku $\forall$ lub $\exists$ znajdującego się w określonym miejscu) w formule ψ nazywamy pewien fragment (podsłowo) formuły ψ, zdefiniowany zgodnie z następującymi regułami:

1) jeżeli formuła ψ ma jedną z postaci: $\neg\varphi_1$, $\varphi_1 \vee \varphi_2$, $\varphi_1 \wedge \varphi_2$, $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$, $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$, oraz kwantyfikator ten występuje w formule φ_1 (odpowiednio: w φ_2), to jego zasięgiem w ψ jest jego zasięg w φ_1 (lub odpowiednio w φ_2),

2) jeżeli formuła ψ jest postaci $\exists x \varphi$ lub $\forall x \varphi$ i interesujący nas kwantyfikator występuje w φ, to jego zasięgiem w ψ jest jego zasięg w φ,

3) jeżeli formuła ψ jest postaci $\exists x \varphi$ lub $\forall x \varphi$ i interesujący nas kwantyfikator jest pierwszym znakiem ψ, to jego zasięgiem w ψ jest formuła φ.

Wystąpienie zmiennej x w formule ψ jest związane, jeżeli znajduje się w zasięgu pewnego kwantyfikatora wiążącego zmienną x. Pozostałe wystąpienia zmiennej x w formule ψ nazywamy wolnymi.

Formułę nazywamy zdaniem, jeżeli żadna zmienna nie występuje w niej jako wolna.

3.5.2 Dokończenie definicji systemów logicznych

Mówimy, że term t jest podstawialny w formule φ za zmienną x, jeżeli żadne wolne w φ wystąpienie zmiennej x nie znajduje się w zasięgu kwantyfikatora wiążącego jakąkolwiek zmienną występującą w termie t.

We wszystkich systemach logicznych, aksjomaty i reguły dowodzenia zawierających wyrażenie postaci $\varphi[x \leftarrow t]$ mogą być stosowane w systemie pod warunkiem, że term t jest podstawialny w formule φ za zmienną x.

3.6 Przykłady teorii

3.6.1 Teoria grup

Dobrym przykładem pozwalającym łatwo znajdować różne przykłady jest teoria grup, czyli teoria zapisana za pomocą symboli $\cdot$, $^{-1}$ oraz 1, złożona z następujących aksjomatów:

1) $\forall x \forall y \forall z\ ((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$,

2) $\forall x\ (x \cdot 1 = x \wedge 1 \cdot x = x)$,

3) $\forall x\ (x \cdot x^{-1} = 1 \wedge x^{-1} \cdot x = 1)$.

3.6.2 Arytmetyka Q

Ważnymi przykładami będą arytmetyki, na przykład tzw. arytmetyka Q, odkryta przez Raphaela Mitchela Robinsona [3], złożona z następujących aksjomatów:

1) $\forall x\ (x + 1 \neq 0)$,

2) $\forall x \forall y\ (x + 1 = y + 1 \Rightarrow x = y)$,

3) $\forall x\ (x + 0 = x)$,

4) $\forall x \forall y\ (x + (y + 1) = (x + y) + 1)$,

5) $\forall x\ (x \cdot 0 = 0)$,

6) $\forall x \forall y\ (x \cdot (y + 1) = x \cdot y + x)$,

7) $\forall x\ (\neg x < 0)$,

8) $\forall x \forall y\ (x < y + 1 \Leftrightarrow x < y \vee x = y)$,

9) $\forall x \forall y\ (x < y \vee x = y \vee y < x)$.

3.6.3 Arytmetyka Peano

Po dopisaniu do teorii Q wszystkich aksjomatów indukcji

$$(\varphi[x \leftarrow 0] \wedge \forall x\ (\varphi \Rightarrow \varphi[x \leftarrow x + 1])) \Rightarrow \forall x\ \varphi,$$

czyli po dodaniu schematu indukcji, otrzymujemy arytmetykę Peano. Jest to podstawowy zbiór aksjomatów arytmetycznych.

3.6.4 Teoria mnogości

Ważna jest też teoria mnogości Zermelo-Fraenkla (ZF), która pozwala sformalizować niemal wszystkie rozumowania matematyczne. Do jej wyrażenia wystarczy język z równością i dwuargumentowym symbolem $\in$ oznaczającym relację należenia. Nie ma powodu, aby tutaj przytaczać wszystkie aksjomaty tej teorii. Wśród nich są aksjomat ekstensjonalności

$$\forall X\ \forall Y\ ((\forall z\ (z \in X \Leftrightarrow z \in Y)) \Rightarrow X = Y)$$

oraz schemat wyróżniania złożony z wszystkich formuł postaci

$$\forall X\ \exists Y \forall z\ (z \in Y \Leftrightarrow z \in X \wedge \varphi).$$

[3] Przedstawiona lista aksjomatów pochodzi z książki *Mathematical Logic* Shoenfielda. Oryginalna arytmetyka Q jest sformułowana w języku bez symbolu $<$, w związku z tym nie ma trzech ostatnich aksjomatów i nic nie mówi o uporządkowaniu liczb naturalnych. Za to ma dodatkowy aksjomat $x \neq 0 \Rightarrow \exists y\ (x = y + 1)$. Można w niej wprowadzić porządek przyjmując definicję $x < y \Leftrightarrow \exists z\ (x + (z + 1) = y)$. W takiej teorii trudno dowieść spójność relacji $<$.

3.7 Rodzaje teorii

Pojęcie teorii zostało wprowadzone w rozdziale 3.4. Teraz zdefiniujemy kilka pojęć opisujących różne rodzaje teorii.

Teoria T jest sprzeczna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje formuła φ taka, że $T \vdash \varphi$ oraz $T \vdash \neg\varphi$.

Teoria T jest niesprzeczna, jeżeli nie jest sprzeczna.

Teoria T jest zupełna, jeżeli dla każdego zdania φ albo $T \vdash \varphi$, albo $T \vdash \neg\varphi$.

Lemat 3.1 *Następujące warunki są równoważne:*

1) teoria T jest sprzeczna,

2) istnieje zdanie φ takie, że $T \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$,

3) każda formuła jest twierdzeniem teorii T. □

Przykładem teorii sprzecznej może być teoria mnogości ze schematem

$$\exists A\, \forall x\, (x \in A \Leftrightarrow \varphi)$$

zamiast schematu wyróżniania przyjmowanego w teorii Zermelo - Fraenkla. Taki schemat wyróżniania sugerował Cantor w swojej teorii mnogości.

4 Własności systemu logicznego Schoenfielda

4.1 Definicja systemu raz jeszcze

W tym systemie formuły zapisujemy przy użyciu jedynie dwóch spójników $\neg$ i $\vee$ oraz kwantyfikatora szczegółowego $\exists$. Formuły z innymi spójnikami uważamy za skróty odpowiednich formuł zapisanych wyłącznie za pomocą $\neg$, $\vee$ oraz $\exists$ zgodnie z następującymi wzorami

$$\begin{array}{rcl}
\varphi \Rightarrow \psi & = & \neg\varphi \vee \psi, \\
\varphi \wedge \psi & = & \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi), \\
\varphi \Leftrightarrow \psi & = & (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi), \\
\forall x\, \varphi & = & \neg\exists x\, \neg\varphi.
\end{array}$$

Aksjomatami logicznymi systemu są wszelkie formuły następujących postaci:

$$\neg\varphi \vee \varphi \;\text{ oraz }\; \varphi[x \leftarrow t] \Rightarrow \exists x\varphi.$$

W systemie posługujemy się następującymi regułami dowodzenia:

$$\frac{\psi}{\varphi \vee \psi}, \quad \frac{\varphi \vee \varphi}{\varphi}, \quad \frac{\varphi \vee (\psi \vee \xi)}{(\varphi \vee \psi) \vee \xi}, \quad \frac{\varphi \vee \psi,\ \neg\varphi \vee \xi}{\psi \vee \xi}, \quad \frac{\varphi \Rightarrow \psi}{(\exists x\varphi) \Rightarrow \psi},$$

z tym, że ostatnią stosujemy tylko wtedy, gdy zmienna x nie występuje jako wolna w ψ (patrz rozdział 3.5.1).

4.2 Kilka własności systemu

Lemat 4.1 *Jeżeli w dowodzie wystąpiła formuła $\varphi \vee \psi$, to ten dowód możemy wydłużyć tak, aby znalazła się w nim także formuła $\psi \vee \varphi$.*

Dowód. Do dowodu

$$\ldots,\ \varphi \vee \psi,\ \ldots$$

dopisujemy aksjomat $\neg\varphi \vee \varphi$ oraz formułę $\psi \vee \varphi$. Otrzymany ciąg

$$\ldots,\ \varphi \vee \psi,\ \ldots,\ \neg\varphi \vee \varphi,\ \psi \vee \varphi$$

też jest dowodem. Ostatnia formuła wynika na podstawie reguły rezolucji z dwóch uwidocznionych w dowodzie. □

Lemat 4.2 (reguła odrywania) *Jeżeli formuła $\varphi \Rightarrow \psi$ ma dowód, to każdy dowód zawierający formułę φ można tak wydłużyć, aby zawierał formułę ψ.*

Dowód. Do dowodu

$$\ldots,\ \varphi,\ \ldots$$

dopisujemy w pierwszym rzędzie dowód formuły $\varphi \Rightarrow \psi$ czyli formuły $\neg\varphi \vee \psi$ otrzymując

$$\ldots,\ \varphi,\ \ldots, \ldots\ \neg\varphi \vee \psi,$$

a następnie tworzymy ciąg

$$\ldots,\ \varphi,\ \ldots, \ldots\ \neg\varphi \vee \psi,\ \varphi \vee \psi,\ \psi \vee \psi,\ \psi.$$

Ten ciąg jest dowodem. Końcowe formuły otrzymujemy stosując kolejno reguły dołączania, rezolucji i kontrakcji. □

Alternatywą z członami $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots, \varphi_n$ będziemy nazywać formułę $\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \ldots \vee \varphi_n$ z dowolnym rozmieszczeniem nawiasów.

Lemat 4.3 *Jeżeli φ jest członem alternatywy Φ, to każdy dowód zawierający φ można wydłużyć do dowodu zawierającego Φ.*

Dowód. Lemat dowodzimy przez indukcję ze względu na liczbę członów alternatywy Φ. Dla alternatyw jednoczłonowych lemat jest oczywisty.

Przyjmijmy, że $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$. Formuła φ jest albo członem Φ_1, albo Φ_2. W pierwszym przypadku, dowód zawierający φ na mocy założenia indukcyjnego możemy wydłużyć do dowodu Φ_1, do którego na mocy reguły dołączania możemy dopisać $\Phi_1 \vee \Phi_2$, czyli Φ.

W drugi przypadku, jeżeli φ jest członem Φ_2, to postępując analogicznie dowód zawierający φ wydłużamy do dowodu zawierającego $\Phi_1 \vee \Phi_2$, a następnie, korzystając z lematu 4.1, przestawiamy człony alternatywy otrzymując $\Phi_1 \vee \Phi_2$, czyli Φ. □

Można dowieść też silniejszy

Lemat 4.4 *Jeżeli φ jest członem alternatywy Φ, to formuła $\varphi \Rightarrow \Phi$ jest prawem logicznym.*

Dowód. Z tego lematu można wyprowadzić poprzedni lemat posługując się regułą odrywania. Dowodzimy go również przez indukcję ze względu na liczbę członów formuły Φ.

Jeżeli alternatywa Φ ma jeden człon, to jest równa φ i formuła $\varphi \Rightarrow \Phi = \varphi \Rightarrow \varphi = \neg\varphi \vee \varphi$ jest aksjomatem logiki, a więc tym bardziej jest prawem logicznym.

Przypuśćmy, że $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$. Formuła φ jest albo członem Φ_1, albo Φ_2. W pierwszym przypadku, z założenia indukcyjnego mamy, że $\varphi \Rightarrow \Phi_1$ jest prawem logicznym. Aby dowieść lemat, wystarczy zauważyć, że ciąg

$$\neg\varphi \vee \Phi_1,\ (\neg\varphi \vee \Phi_1) \vee \Phi_2,\ \Phi_2 \vee (\neg\varphi \vee \Phi_1),\ (\Phi_2 \vee \neg\varphi) \vee \Phi_1,\ \Phi_1 \vee (\Phi_2 \vee \neg\varphi),$$

$$(\Phi_1 \vee \Phi_2) \vee \neg\varphi,\ \neg\varphi \vee (\Phi_1 \vee \Phi_2)$$

można uzupełnić do pełnego dowodu implikacji $\varphi \Rightarrow \Phi_1 \vee \Phi_2$.

W drugim przypadku postępujemy podobnie i do dowodu uzupełniamy ciąg

$$\neg\varphi\vee\Phi_2,\ \Phi_2\vee\neg\varphi,\ (\Phi_2\vee\neg\varphi)\vee\Phi_1,\ \Phi_1\vee(\Phi_2\vee\neg\varphi),\ (\Phi_1\vee\Phi_2)\vee\neg\varphi,\ \neg\varphi\vee(\Phi_1\vee\Phi_2). \ \square$$

Twierdzenie 4.5 *Jeżeli wszystkie człony alternatywy Ψ są także członami alternatywy Φ, to formuła $\Psi \Rightarrow \Phi$ jest prawem logicznym, a więc $\vdash \Psi \Rightarrow \Phi$. Co więcej, każdy dowód zawierający Ψ można wydłużyć do dowodu zawierającego Φ.*

Dowód. Twierdzenie dowodzimy przez indukcję ze względu na liczbę członów alternatywy Ψ. Dla alternatyw jednoczłonowych twierdzenie wynika z poprzedniego lematu.

Przypuśćmy, że $\Psi = \Psi_1 \vee \Psi_2$. Z założenia indukcyjnego mamy, że

$$\vdash \Psi_1 \Rightarrow \Phi \ \text{ oraz } \ \vdash \Psi_2 \Rightarrow \Phi.$$

Pisząc dowód formuły $\Psi \Rightarrow \Phi$ odpowiednio uzupełniamy następujący ciąg formuł:

$$\neg\Psi \vee (\Psi_1 \vee \Psi_2),\ (\neg\Psi \vee \Psi_1) \vee \Psi_2,\ \Psi_2 \vee (\neg\Psi \vee \Psi_1),\ \neg\Psi_2 \vee \Phi,\ (\neg\Psi \vee \Psi_1) \vee \Phi,$$

$$\Phi \vee (\neg\Psi \vee \Psi_1),\ (\Phi \vee \neg\Psi) \vee \Psi_1,\ ((\Phi \vee \neg\Psi) \vee \Psi_1) \vee \neg\Psi,\ \neg\Psi \vee ((\Phi \vee \neg\Psi) \vee \Psi_1),$$

$$(\neg\Psi \vee (\Phi \vee \neg\Psi)) \vee \Psi_1,\ \Psi_1 \vee (\neg\Psi \vee (\Phi \vee \neg\Psi)),\ \neg\Psi_1 \vee \Phi,\ (\neg\Psi \vee (\Phi \vee \neg\Psi)) \vee \Phi,$$

$$\Phi \vee (\neg\Psi \vee (\Phi \vee \neg\Psi)),\ (\Phi \vee \neg\Psi) \vee (\Phi \vee \neg\Psi),\ (\Phi \vee \neg\Psi),\ \neg\Psi \vee \Phi. \ \square$$

4.3 Twierdzenie o dedukcji

Twierdzenie 4.6 (o dedukcji, Jacques Herbrand) *Niech φ będzie zdaniem. Formuła ψ jest twierdzeniem teorii T z dodatkowym aksjomatem φ (teorii $T \cup \{\varphi\}$) wtedy i tylko wtedy, gdy implikacja $\varphi \Rightarrow \psi$ jest twierdzeniem teorii T.*

Dowód. Wystarczy dowieść implikację „od lewej do prawej”. Implikację przeciwną łatwo wywnioskować posługując się regułą odrywania, patrz lemat 4.2.

Załóżmy więc, że w teorii T z dodatkowym aksjomatem φ można dowieść ψ i ciąg

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n$$

jest dowodem, który o tym świadczy. Wtedy między innymi $\varphi_n = \psi$. Utwórzmy teraz ciąg

$$\neg\varphi \vee \varphi_1,\ \neg\varphi \vee \varphi_2,\ \ldots,\ \neg\varphi \vee \varphi_n.$$

Pokażemy, że ten ciąg można uzupełnić do dowodu w teorii T. Oczywiście, w ten sposób dowiedziemy w teorii T formułę $\neg\varphi \vee \varphi_n$, czyli $\varphi \Rightarrow \psi$.

Zrobimy to przez indukcję: Pokażemy, że dowód zawierający wszystkie formuły $\neg\varphi \vee \varphi_i$ dla $i < k$ można wydłużyć do dowodu zawierającego $\neg\varphi \vee \varphi_k$. W tym celu zastanowimy, z jakiego powodu w dowodzie formuły ψ znalazła się formuła φ_k.

Formuła φ_k mogła być aksjomatem (logicznym, równości lub pozalogicznym z teorii T). Wtedy do tworzonego dowodu dołączamy ciąg

$$\varphi_k,\ \varphi_k \vee \neg\varphi,\ \neg\varphi_k \vee \varphi_k,\ \neg\varphi \vee \varphi_k.$$

Formuła φ_k mogła być dodatkowym aksjomatem φ. Wtedy do tworzonego dowodu dołączamy aksjomat $\neg\varphi \vee \varphi$ identyczny z $\neg\varphi \vee \varphi_k$.

Być może formuła φ_k wynikała z formuły φ_i i jednej z trzech pierwszych reguł dowodzenia rozważanego systemu. W tych trzech przypadkach możliwość wydłużenia dowodu zawierającego $\neg\varphi \vee \varphi_i$ do dowodu zawierającego także $\neg\varphi \vee \varphi_k$ wynika z twierdzenia 4.5.

Jeżeli formuła $\varphi_k = \beta \vee \delta$ wynika z formuł postaci $\alpha \vee \beta$ oraz $\neg\alpha \vee \delta$ za pomocą reguły rezolucji, to formułę $\varphi \Rightarrow \varphi_k$ dołączamy do tworzonego dowodu w następujący sposób: najpierw z umieszczonych już w dowodzie formuł $\neg\varphi \vee (\alpha \vee \beta)$ oraz $\neg\varphi \vee (\neg\alpha \vee \delta)$ wyprowadzamy formuły $\alpha \vee (\neg\varphi \vee \beta)$ oraz $\neg\alpha \vee (\neg\varphi \vee \delta)$ korzystając z twierdzenia 4.5, następnie stosujemy regułę rezolucji i dołaczamy do dowodu $(\neg\varphi \vee \beta) \vee (\neg\varphi \vee \delta)$ i w końcu po raz kolejny stosujemy twierdzenie 4.5 by uzyskać formułę $\neg\varphi \vee (\beta \vee \delta)$ równą $\varphi \Rightarrow \varphi_k$.

Analogicznie postępujemy w ostatnim przypadku, gdy formułę $\varphi_k = \exists x\alpha \Rightarrow \beta$ otrzymaliśmy stosując regułę dołączania kwantyfikatora ogólnego do formuły φ_i postaci $\alpha \Rightarrow \beta$. Wtedy najpierw z formuły $\neg\varphi \vee \varphi_i = \neg\varphi \vee (\neg\alpha \vee \beta)$ stosując twierdzenie 4.5 wprowadzamy $\neg\alpha \vee (\neg\varphi \vee \beta)$, następnie dopisujemy kwantyfikator uzyskując $\neg\exists x\alpha \vee (\neg\varphi \vee \beta)$ (jest to możliwe dzięki założeniu, że φ jest zdaniem). W końcu przestawiamy człony formuły tak, by otrzymać $\neg\varphi \vee (\neg\exists x\alpha \vee \beta) = \neg\varphi \vee \varphi_k$.

W ten sposób rozważyliśmy wszystkie możliwe przypadki i udowodniliśmy twierdzenie o dedukcji. $\square$

5 Spełnianie (prawdziwość) formuł

Strukturą nazywamy zbiór A (zwany uniwersum) z wyróżnionymi elementami, funkcjami wieloargumentowymi przekształcającymi A w A i relacjami w zbiorze A (także wieloargumentowymi). Jeżeli mamy dany pewien język L (a więc zbiór symboli), to rozważamy struktury dla L. Są to struktury, w których jest określone znaczenie wszystkich stałych oraz symboli funkcyjnych i relacyjnych języka L. Znaczeniem stałej jest element uniwersum struktury, znaczeniem symbolu funkcyjnego – funkcja, a symbolu relacyjnego – relacja, o odpowiedniej (w obu przypadkach) liczbie argumentów.

Wartościowaniem zmiennych w strukturze o uniwersum A nazywamy dowolną funkcję przyporządkowującą zmiennym elementy zbioru A.

Symbolem $t[h]$ oznaczamy wartość termu t przy wartościowaniu h. Pojęcie to definiujemy wzorami

$$t[h] = \begin{cases} C & \text{jeżeli } t = c, \\ h(x) & \text{jeżeli } t \text{ jest zmienną } x, \\ F(t_1[h], \ldots, t_n[h]) & \text{jeżeli } t = f(t_1, \ldots, t_n), \end{cases}$$

gdzie c jest stałą, a C jest znaczeniem tej stałej w rozważanej strukturze oraz f jest n-argumentowym symbolem funkcyjnym, a F – znaczeniem tego symbolu w tej strukturze.

Mówimy, że formuła φ jest spełniona w strukturze $\mathcal{A}$ przy wartościowaniu h, jeżeli

1) $\varphi = r(t_1, \ldots, t_n)$ oraz $(t_1[h] \ldots, t_n[h]) \in R$, gdzie R jest relacją w strukturze $\mathcal{A}$ odpowiadającą symbolowi relacyjnemu r,

2) $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$ oraz jedna z formuł φ_1 lub φ_2 jest spełniona w strukturze $\mathcal{A}$ przy wartościowaniu h ($\mathcal{A} \models \varphi_1[h]$ lub $\mathcal{A} \models \varphi_1[h]$),

3) $\varphi = \neg\psi$ oraz formuła ψ nie jest spełniona w strukturze $\mathcal{A}$ przy wartościowaniu h ($\mathcal{A} \not\models \varphi_1[h]$),

4) $\varphi = \exists x\psi$ oraz w stukturze $\mathcal{A}$ jest spełniona formuła ψ przy pewnym wartościowaniu h' takim, że $h'(y) = h(y)$ dla wszystkich zmiennych $y \neq x$ ($\mathcal{A} \models \psi[h']$) .

Formuła φ jest spełniona w strukturze $\mathcal{A}$, jeżeli jest spełniona w tej strukturze przy każdym wartościowaniu.

Napisy $\mathcal{A} \models \varphi[h]$ oraz $\mathcal{A} \models \varphi$ oznaczają odpowiednio, że formuła φ jest spełniona w strukturze $\mathcal{A}$ przy wartościowaniu h, i że jest spełniona w strukturze $\mathcal{A}$.

Pokazuje się, że zdanie spełnione w strukturze przy pewnym wartościowaniu jest w tej strukturze spełnione. Prawdziwy jest też ogólniejszy fakt, że spełnianie formuły przy wartościowaniu h zależy tylko od wartości, które wartościowanie h przypisuje zmiennym występującym w formule jako wolne.

5.1 Rodzaje teorii

Struktura $\mathcal{A}$ jest modelem teorii T ($\mathcal{A} \models T$), jeżeli każdy aksjomat teorii T jest spełniony w strukturze $\mathcal{A}$.

Lemat 5.1 *Jeżeli $\mathcal{A}$ jest strukturą, to teoria struktury $\mathcal{A}$, czyli*

$$\{\varphi : \quad \varphi \textit{ jest zdaniem oraz } \mathcal{A} \models \varphi\},$$

jest niesprzeczna i zupełna.

6 Dodatek: system dedukcji naturalnej

6.1 Reguły dowodzenia systemu dowodów założeniowych

Reguły systemu dowodów założeniowych opisują spójniki i kwantyfikatory w sposób – jak sądzę – najbardziej zgodny z intuicjami. W tym systemie przyjmuje się następujące reguły:

Reguła odrywania (RO):

$$\frac{\varphi \Rightarrow \psi, \varphi}{\psi}.$$

Reguły dotyczące koniunkcji:

$$\frac{\varphi, \psi}{\varphi \wedge \psi}, \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}, \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}.$$

Reguły dotyczące alternatywy:

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}, \quad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}, \quad \frac{\varphi \vee \psi, \neg\varphi}{\psi}.$$

Reguły dotyczące równoważności:

$$\frac{\varphi \Rightarrow \psi, \psi \Rightarrow \varphi}{\varphi \Leftrightarrow \psi}, \quad \frac{\varphi \Leftrightarrow \psi}{\varphi \Rightarrow \psi}, \quad \frac{\varphi \Leftrightarrow \psi}{\psi \Rightarrow \varphi}.$$

Reguły dotyczące kwantyfikatora ogólnego (pierwsza to reguła dołączania tego kwantyfikatora, druga – opuszczania):

$$\frac{\varphi}{\forall x\varphi}, \quad \frac{\forall x\varphi}{\varphi[x \leftarrow t]}.$$

Reguły dotyczące kwantyfikatora egzystencjalnego:

$$\frac{\varphi[x \leftarrow t]}{\exists x\varphi}, \quad \frac{\exists x\varphi}{\varphi[x \leftarrow c]}.$$

System dowodów założeniowych pozwala definiować dodatkowe reguły dowodzenia. W jego ewentualnych rozszerzeniach mogą się pojawić tzw. reguły wtórne (jeżeli $\varphi \Rightarrow \psi$ jest twierdzeniem, to $\frac{\varphi}{\psi}$ jest regułą wtórną), reguły dotyczące definicji oraz równości, np. reguła $\frac{\varphi,\ t = s}{\varphi[t//s]}$ pozwalająca pewne wystąpienie termu t w formule φ zastąpić równym mu termem s.

6.2 Dowody założeniowe

Przypuśćmy, że chcemy dowieść formułę Φ, którą przedstawiliśmy (jakkolwiek, w tym dla $n = 0$) w postaci

$$\varphi_1 \Rightarrow \dots (\varphi_n \Rightarrow \psi).$$

Wtedy możemy przyjąć, że $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ są założeniami dowodu, ψ jest tezą, a $\neg\psi$ jest założeniem dowodu nie wprost.

W systemie założeniowym wszystkie reguły dotyczące kwantyfikatorów mogą być stosowane po spełnieniu pewnych – sformułowanych dalej – warunków.

Dowodem wprost nazywamy ciąg $\psi_1, \dots \psi_m$ formuł, w którym każda formuła jest albo aksjomatem (logicznym i ewentualnie pozalogicznym), albo założeniem (ale nie założeniem dowodu nie wprost), albo wcześniej udowodnionym twierdzeniem, albo też wnioskiem z formuł poprzednich.

Dowodem nie wprost nazywamy ciąg $\psi_1, \dots \psi_m$ formuł, w którym każda formuła jest albo aksjomatem, albo założeniem, w tym założeniem dowodu nie wprost, albo wcześniej udowodnionym twierdzeniem, albo też wnioskiem z formuł poprzednich.

Dowodem wprost formuły Φ nazywamy dowód wprost, w którym znajduje się formuła ψ. Dowodem nie wprost formuły Φ nazywamy dowód nie wprost, w którym znajduje się pewna formuła γ i jej zaprzeczenie $\neg\gamma$.

Formuła Φ jest twierdzeniem, jeżeli ma dowód wprost lub ma dowód nie wprost.

6.3 Warunki stosowania niektórych reguł

W systemie założeniowym, regułę dołączania kwantyfikatora ogólnego DO, która jest postaci $\frac{\varphi}{\forall x \varphi}$, stosujemy tylko wtedy, gdy zmienna x nie jest wolna w założeniach dowodu.

Regułę opuszczania kwantyfikatora szczegółowego (egzystencjalnego) $\frac{\exists x \varphi}{\varphi[x \leftarrow c]}$ w systemie założeniowym stosujemy w następujący sposób:

1) term c jest postaci $f(x_1, \ldots, x_n)$, gdzie f jest symbolem funkcyjnym, a $x_1, \ldots, x_n$ są wszystkimi zmiennymi różnymi od x, które występują jako wolne w formule φ,

2) symbol funkcyjny f nie występuje ani w aksjomatach, ani w dowodzonej formule, ani w napisanym już fragmencie dowodu.

7 Dodatek: System Gödla

7.1 Aksjomaty logiczne w systemie Gödla

Aksjomatami w tym systemie są dowolne formuły następujących postaci:

$$\varphi \Rightarrow \varphi \vee \varphi, \quad \varphi \vee \varphi \Rightarrow \varphi, \quad \varphi \vee \psi \Rightarrow \psi \vee \varphi, \quad (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\xi \vee \varphi \Rightarrow \xi \vee \psi),$$

$$(\forall x \varphi) \Rightarrow \varphi[x \leftarrow t], \quad (\forall x (\varphi \vee \psi)) \Rightarrow (\varphi \vee (\forall x \psi))$$

w przypadku ostatniego aksjomatu jednak pod warunkiem, że zmienna x nie jest wolna w φ.

7.2 Reguły systemu z pracy Gödla

Gödel korzysta z dwóch spójników $\neg$ i $\vee$ oraz kwantyfikatora $\forall$. Dopuszcza także stosowanie skrótów, np. formułę ze spójnikiem $\Rightarrow$ uważa za skróconą wersję znanej formuły z definicji implikacji. Przyjmuje dwie reguły dowodzenia: reguła odrywania RO i dołączania kwantyfikatora ogólnego (patrz reguły systemu założeniowego).

8 Dodatek: twierdzenie Gödla o pełności

Twierdzenie o pełności składa się właściwe z dwóch twierdzeń: o poprawności i właściwego twierdzenia o pełności. Zostało po raz pierwszy dowiedzione przez Kurta Gödla w 1929 roku.

Twierdzenie 8.1 (o poprawności) *Jeżeli $\mathcal{A}$ jest modelem T, a φ jest twierdzeniem teorii T, to formuła φ jest spełniona w strukturze $\mathcal{A}$.*

Twierdzenie 8.2 (o pełności) *Jeżeli formuła φ jest spełniona w każdym modelu teorii T, to φ daje się dowieść w teorii T.*

8.1 Potrzebne fakty

Zostanie tutaj przedstawiony dowód twierdzenia o pełności, który być może przypomina dowód oryginalny, ale został opracowany później i zawiera elementy przypisywane Leonowi Henkinowi. Dowód będzie nieefektywny, nie będzie podawał konstrukcji dowodu twierdzenia, sprowadzi do sprzeczności fakt nieistnienia dowodu. Zostanie przeprowadzony przy milczącym założeniu, że teoria jest zapisana w przeliczalnym języku (czyli ma przeliczalnie wiele symboli funkcyjnych i relacyjnych). Założenie to nie jest istotne, ale po jego opuszczeniu konieczne jest odwołanie się do aksjomatu wyboru. Dowód zostanie też przedstawiony w przypadku teorii bez równości. Dla teorii z równością potrzebna jest jeszcze dodatkowa konstrukcja ilorazowa, która zostanie pominięta.

Potrzebne będą dwa pomocnicze twierdzenia.

Twierdzenie 8.3 (o dedukcji, Jacques Herbrand) *Niech φ będzie zdaniem. Formuła ψ jest twierdzeniem teorii T z dodatkowym aksjomatem φ (teorii $T \cup \{\varphi\}$) wtedy i tylko wtedy, gdy implikacja $\varphi \Rightarrow \psi$ jest twierdzeniem teorii T.* $\square$

Twierdzenie 8.4 (o stałej) *Przypuśćmy, że stała c nie występuje w formule φ, ani w aksjomatach teorii T. Jeżeli formuła $\varphi[x \leftarrow c]$ jest twierdzeniem teorii T, to w teorii T można dowieść także formuły $\forall x \varphi$ oraz φ. Co więcej, można to zrobić nie używając w tych dowodach stałej c (formuły te można dowieść w języku bez stałej c).* $\square$

8.2 Dowód twierdzenia o pełności

Przystępujemy teraz do dowodu twierdzenia o pełności.

Twierdzenie 8.5 (o pełności, Kurt Gödel, 1929) *Jeżeli formuła φ jest spełniona w każdym modelu teorii T, to φ daje się dowieść w teorii T.*

Dowód. Na razie twierdzenie o pełności sprowadzimy do innej, następującej postaci: jeżeli teoria T' jest niesprzeczna, to istnieje struktura, w której są spełnione wszystkie aksjomaty teorii T'.

O φ możemy dodatkowo założyć, że jest zdaniem. Załóżmy też dla dowodu nie wprost, że φ nie jest twierdzeniem teorii T.

Nietrudno zauważyć, że wtedy teoria $T \cup \{\neg\varphi\}$ jest niesprzeczna. Gdyby bowiem istniała formuła σ taka, że

$$T \cup \{\neg\varphi\} \vdash \sigma \wedge \neg\sigma,$$

to na mocy twierdzenia o dedukcji otrzymalibyśmy, że

$$T \vdash \neg\varphi \Rightarrow \sigma \wedge \neg\sigma.$$

Dalej, z prawa kontrapozycji wynikało by, że

$$T \vdash \neg(\sigma \wedge \neg\sigma) \Rightarrow \varphi,$$

i ostatecznie, wbrew założonej własności φ otrzymalibyśmy, że $T \vdash \varphi$.

Istnieje więc struktura $\mathcal{A}$, w której, oprócz wszystkich aksjomatów teorii T, jest spełnione zdanie $\neg\varphi$. Założyliśmy jednak, że strukturze $\mathcal{A}$ jest spełnione także zdanie φ. Otrzymaliśmy więc sprzeczność, gdyż w żadnej strukturze nie mogą być jednocześnie spełnione zdanie i jego negacja. $\square$

Twierdzenie 8.6 *Jeżeli teoria T jest niesprzeczna, to istnieje struktura, w której są spełnione wszystkie aksjomaty teorii T.*

Dowód. Teoria T mówi o czymś, czego nie znamy, ale wiemy, że ze stwierdzeń teorii T nie wynika sprzeczność. Aby dowieść nasze twierdzenie, powinniśmy w pierwszym rzędzie wyjaśnić, o czym mówi teoria T. Wyjaśnimy to zgodnie z następującą ideą: termy, których używamy do określania przedmiotów możemy uznać za rzeczy, o których mówimy. W informatyce ta idea leży u podstaw tzw. semantyk algebraicznych. Na przykład, jeżeli mówimy o liczbach naturalnych, to termy 0, 1, $1 + 1$, $1 + 1 + 1$ itd. oznaczają liczby naturalne i możemy je uznać za liczby naturalne. Pamiętajmy jednak, że możemy mieć bardzo mało stałych i operacji. Wtedy brakuje nam termów oznaczających przedmioty, których istnienie możemy dowieść.

Krok 1. Do języka dodajemy nieskończony ciąg stałych $a_1, a_2, a_3, \ldots$ W bogatszym języku możemy teoretycznie tworzyć więcej dowodów. Z twierdzenia o stałej wynika, że jeżeli teoria T jest niesprzeczna, to nie uda nam się utworzyć dowodu sprzeczności korzystając z nowych stałych. Gdyby istniał dowód sprzeczności wykorzystujący te stałe, to możnaby je stopniowo eliminować z dowodu i w końcu utworzyć dowód sprzeczności nie zawierający nowych stałych. To jest jednak sprzeczne z założeniem o niesprzeczności teorii T.

Krok 2. Nadajemy znaczenie nowym stałym. W tym celu tworzymy ciąg

$$\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \varphi_3(x_3), \ldots$$

zawierający wszystkie formuły z jedną zmienną wolną w języku z nowymi stałymi. Symbol x_i oznacza jedyną zmienną wolną w $\varphi_i(x_i)$. Następnie indukcyjnie tworzymy formuły

$$\Phi_n = (\exists x_n \ \ \varphi_n(x_n)) \Rightarrow \varphi_n(c_n)$$

dobierając (spośród dodanych stałych) stałą c_n tak, aby nie występowała we wcześniej utworzonych formułach tej postaci i w samej formule φ_n. Formuły te będziemy uważać za nowe aksjomaty. Przyjmijmy, że $T_n = T \cup \{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$ oznacza teorię T uzupełnioną o n pierwszych aksjomatów tej postaci.

Fakt 8.7 Teorie T_n są niesprzeczne.

Dowód. Przez indukcję ze względu na n. Oczywiście, teoria T_0 (czyli sama T bez nowych aksjomatów) jest niesprzeczna. Załózmy teraz, że teoria T_{n-1} jest niesprzeczna, a T_n – sprzeczna. Ponieważ dodane aksjomaty są zdaniami, możemy skorzystać z twierdzenia o dedukcji. Otrzymamy, że

$$T_{n-1} \vdash \ \ ((\exists x_n \ \ \varphi_n(x_n)) \Rightarrow \varphi_n(c_n)) \Rightarrow \sigma \wedge \neg\sigma.$$

Korzystając z prawa kontrapozycji, prawa wyłączonego środka i prawa negowania implikacji (i kilku innych) otrzymujemy, że

$$T_{n-1} \vdash \ \ (\exists x_n \ \ \varphi_n(x_n)) \wedge \neg\varphi_n(c_n). \tag{1}$$

Oba człony powyższej koniunkcji dają się więc dowieść. Z dowodliwości drugiego członu i z twierdzenia o stałej wynika, że także

$$T_{n-1} \vdash \ \ \forall x_n \ \ \neg\varphi_n(x_n).$$

Wobec odpowiedniego prawa de Morgana, stąd i z dowodliwości pierwszego członu formuły z (1) wynika wbrew założeniu, że teoria T_{n-1} jest sprzeczna. □

Z udowodnionego faktu wynika, że teoria

$$T_\infty = \bigcup_{n \in N} T_n$$

jest niesprzeczna. Ponieważ ewentualny dowód sprzeczności zawierałby skończenie wiele wyrazów i powoływałby się na skończenie wiele aksjomatów, byłby także dowodem sprzeczności pewnej teorii T_n dla dostatecznie dużego n.

Krok 3. Na koniec teorię T_∞ powiększymy do teorii zupełnej. Weźmy w tym celu ciąg

$$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$$

wszystkich możliwych zdań i przyjmijmy, że $T_0^* = T_\infty$ oraz

$$T_{n+1}^* = \begin{cases} T_n^* & \text{jeżeli } T_n^* \vdash \psi_{n+1}, \\ T_n^* \cup \{\neg\psi_{n+1}\} & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Przez indukcję dowodzimy, że wszystkie teorie T_n^* są niesprzeczne. Niesprzeczną jest więc również teoria

$$T^* = \bigcup_{n \in N} T_n^*.$$

Z konstrukcji wynika, że teoria T^* jest zupełna. Dowolne zdanie ψ jest jednym z wyrazów rozważanego ciągu zdań, na przykład $\psi_{n+1} = \psi$. Definiując T_{n+1}^* podejmujemy decyzję, czy w teorii T^* da się dowieść zdanie ψ, czy jego negację. Jeżeli $T_n^* \vdash \psi_{n+1}$, to oczywiście $T^* \vdash \psi$. W przeciwnym razie $\neg\psi_{n+1}$ uznajemy za nowy aksjomat teorii T^* i wtedy mamy $T^* \vdash \neg\psi$.

Udało się nam skonstruować niesprzeczną, zupełną teorię T^* zawierającą teorię T i wszystkie aksjomaty henkinowskie Ψ_n. Dla takich teorii łatwo zbudować ich model.

Krok 4. Konstrukcja modelu teorii T^*. Będziemy definiować pewną strukturę $\mathcal{A}$. Uniwersum tej struktury będzie zbiór $\mathcal{T}_c$ termów stałych rozważanego języka ze stałymi a_i. W takiej strukturze w naturalny sposób definiujemy interpretacje symboli funkcyjnych: k-argumentowy symbol f jest interpretowany jako funkcja $F : \mathcal{T}_c^k \to \mathcal{T}_c$ zdefiniowana wzorem

$$F(t_1, \ldots, t_k) = f(t_1, \ldots, t_k),$$

a więc F oznacza operację tworzenia termu zaczynającego się symbolem f. W takich strukturach dla dowolnego termu t i dowolnego wartościowania h zachodzi wzór $t[h] = t[x \leftarrow h(x)][y \leftarrow h(y)]\ldots$ (wartością termu t przy wartościowaniu h jest wynik podstawiania za zmienne termów wskazanych przez wartościowanie h). Zauważmy też, że w takiej sytuacji $t[h]$ jest zarówno wartością termu i szczególnym termem stałym. Może więc być częścią innego termu lub formuły, i może być ponownie wartościowany. Jako term stały, $t[h]$ spełnia równość $t[h][h'] = t[h]$.

Interpretację R w strukturze $\mathcal{A}$ symbolu relacyjnego r definiujemy w następujący sposób:

$$(t_1, \ldots, t_k) \in R \iff T^* \vdash r(t_1, \ldots, t_k)$$

dla dowolnych $t_1, \ldots, t_k \in \mathcal{T}_c$. W ten sposób struktura $\mathcal{A}$ została zdefiniowana. Bez trudu sprawdzamy, że dla dowolnych termów $t_1, \ldots, t_k$ (niekoniecznie stałych) i wartościowania h zachodzi następującą własność:

$$\mathcal{A} \models r(t_1, \ldots, t_k)[h] \iff T^* \vdash r(t_1[h], \ldots, t_k[h]).$$

Dla stałych termów $t_1, \ldots, t_k$ zachodzi także

$$\mathcal{A} \models r(t_1, \ldots, t_k) \iff T^* \vdash r(t_1, \ldots, t_k).$$

Aby zakończyć dowód wystarczy pokazać, że dla dowolnego zdania ψ zachodzi równoważność

$$\mathcal{A} \models \psi \iff T^* \vdash \psi. \tag{2}$$

W dowodzie przyda się następujący lemat:

Lemat 8.8 *Przypuśćmy, że T jest teorią niesprzeczną i zupełną, a φ i ψ są zdaniami. Wtedy następujące pary warunków są równoważne:*

1) $T \vdash \varphi \vee \psi$ oraz $T \vdash \varphi$ lub $T \vdash \psi$,

2) $T \vdash \neg\varphi$ oraz nieprawda, że $T \vdash \varphi$. □

Przytoczoną przed lematem równoważność (2) dowodzimy przez indukcję ze względu na budowę zdania ψ. Ustaliliśmy już, że ta równoważność zachodzi dla zdań atomowych. Z podanego lematu wynika, że zachodzi dla zdań będących negacjami i alternatywami zdań prostszych pod warunkiem, że zachodzi dla członów tych zdań. Pozostało zająć się zdaniami rozpoczynającymi się kwantyfikatorem.

Przyjmijmy więc, że $\psi = \exists x \varphi$ i załóżmy, że $\mathcal{A} \models \psi$. Z definicji spełniania wynika, że wtedy

$$\mathcal{A} \models \varphi[h]$$

przy pewnego wartościowania h. Z lematu o podstawianiu (zadanie z listy 1) otrzymujemy, że

$$\mathcal{A} \models \varphi[x \leftarrow h(x)].$$

Pamiętajmy, że $\varphi[x \leftarrow h(x)]$ jest zdaniem i spełnianie tej formuły nie zależy od wartościowania. Dla formuły $\varphi[x \leftarrow h(x)]$ możemy skorzystać z założenia indukcyjnego. Wynika z niego, że

$$T^* \vdash \varphi[x \leftarrow h(x)].$$

Stąd oczywiście wynika, że

$$T^* \vdash \exists x \varphi, \quad \text{czyli} \quad T^* \vdash \psi.$$

Aby dowieść implikację odwrotną zakładamy, że $T^* \vdash \psi$, czyli że $T^* \vdash \exists x \varphi$. Formuła φ ma tylko jedną zmienną wolną i jest postaci $\varphi_n(x_n)$ dla pewnego n. Wobec tego $\psi = \exists x_n \varphi_n(x_n)$. Wiemy też, że Φ_n jest jednym z aksjomatów teorii T^*. Wobec tego, $T^* \vdash \varphi_n[x_n \leftarrow c_n]$. Stąd i z założenia indukcyjnego wynika, że

$$\mathcal{A} \models \varphi_n[x_n \leftarrow c_n].$$

Z lematu o podstawianiu (zadanie z listy 1) otrzymujemy, że

$$\mathcal{A} \models \varphi_n[h], \quad \text{albo} \quad \mathcal{A} \models \varphi[h]$$

dla podstawienia h takiego, że $h(x) = h(x_n) = c_n$. Teraz wystarczy skorzystać z definicji spełniania:

$$\mathcal{A} \models \exists x \varphi, \quad \text{czyli} \quad \mathcal{A} \models \psi.$$

W ten sposób pokazaliśmy, że T^* jest teorią modelu $\mathcal{A}$. Więc w szczególności struktura $\mathcal{A}$ jest modelem mniejszej teorii T. □