Egzaminacyjna lista zadań z Rachunku Lambda.

Antoni Kościelski

(Zagadnienia poruszone na wykładzie i przykładowe zadania, proszę zwrócić szczególną uwagę na 1) definicje, 2) twierdzenia, a także 3) dowody twierdzeń)

1 Algebry kombinatoryjne

Aby być w zgodzie z terminologią Barendregta powinniśmy się posługiwać następującymi pojęciami: algebra aplikacyjna to algebra z dwuelementowym działaniem, algebra kombinatoryjna (kombinatorów) to algebra aplikacyjna z dwoma elementami K i S o wiadomych własnościach, często zakłada się dodatkowo, że jest przynajmniej dwuelementowa.

Kombinatory S i K. Twierdzenie wyrażające główną własność algebr kombinatoryjnych, czyli kombinatoryjną zupełność. Dowód tego twierdzenia.

Zad. 1.1. Wyraź za pomocą kombinatorów S i K termy Z taki, że $Zfgx = f(gx)$ oraz U taki, że $Uxy = xx$.

Zad. 1.2. Termy P i Q są niezgodne, jeżeli w algebrze aplikacyjnej, w której zachodzi równość $P = Q$, ewentualnie w λ-rachunku uzupełnionym o równość $P = Q$ można dowieść równość dowolnej pary termów. Pokaż, że z każdej z następujących równości

(a) $K = KI$,

(b) $K = I$,

(c) $S = K$

(d) $xx = xy$

(e) $I = \lambda x.xxx$

wynika równość $X = Y$ dla dowolnych termów X i Y. Mówiąc w innym języku, jeżeli w pewnej algebrze aplikacyjnej zachodzi przynajmniej jedna z podanych równości, to jest to algebra jednoelementowa.

Zad. 1.3. Pokaż, że jeżeli w algebrze aplikacyjnej działanie jest łączne lub przemienne, to jest to algebra jednoelementowa.

Zad. 1.4. Pokaż, że w algebrach kombinatoryjnych zachodzi równość

$$Kxy = S(S(KS)(S(KK)K))(K(SKK))xy,$$

a w λ-rachunku dowodzi się także, że

$$K = S(S(KS)(S(KK)K))(K(SKK)).$$

Zad. 1.5. Pokaż, że algebra kombinatoryjna o przynajmniej dwóch elementach jest nieskończona.

Zad. 1.6. Przyjmijmy, że napis $[M, N]$ oznacza wyrażenie $S(SI(KN)(KM))$. Oblicz $[M, N]K$ oraz $[M, N](KI)$.

Zad. 1.7. Operację $[M, N]$ mona zinterpretować na dwa sposoby. Można uważąć ją za operację pary. Wtedy poprzednie zadanie podaje, jak mając parę odczytać jej współrzędne. Można też przyjąć, że elementy K i KI reprezentują odpowiednio prawdę i fałsz. Wtedy dla dowolnego wyrażenia W o wartościach logicznych, wyrażenie $[M, N]W$ można interpretować jako definicję warunkową (stwierdzenie warunkowe) „jeżeli W, to M, a w przeciwnym razie – N". Zaproponuj wyrażenia, które będzie można zinterpretować jako spójniki logiczne.

2 Formalizacja λ-rachunku

Redeksy, relacje α- i β-redukcji, relacje $\to_\beta$, $\twoheadrightarrow_\beta$ i $=_\beta$. Postać normalna termu. Chyba nie muszę przypominać, że znajomość podstawowych definicji jest bardzo ważna.

Zad. 2.8. Uprość λ-term do postaci normalnej

(a) $(\lambda y.yyy)((\lambda ab.a)I(SS))$
(b) $(\lambda yz.zy)((\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx))(\lambda w.I)$,
(c) $SSSSSSS$.
(d) $(\lambda xyz.zyx)aa(\lambda pq.q)$,
(e) $SKSKSK$.

Zad. 2.9. Dla dowolnej dodatniej liczby naturalnej n znajdź term B_n taki, że dla wszystkich $i < n$ i dowolnych termów $Q_1, \ldots, Q_n$ mamy $B_n c_i Q_1 \ldots Q_n = Q_i$.

Zad. 2.10. Udowodnij, że dla dowolnego λ-termu M, który jest abstrakcją, zachodzi równość $M = \lambda x.Mx$.

Zad. 2.11. Pokaż, że termy $\lambda xsz.s(xsz)$ oraz $\lambda xsz.xs(sz)$ definiują (dla numerałów Churcha) operację następnika i są niezgodne.

Zad. 2.12. Czy zachodzą równości $(\lambda xyz.(xz)(yz))\lambda u.u =_\beta (\lambda v.v\lambda yzu.u)\lambda x.x$ oraz $(\lambda xy.x\lambda z.z)\lambda a.a =_\beta (\lambda y.y)\lambda bz.z$.

Zad. 2.13. Udowodnij, że jeżeli $x \neq y$ i $x \notin FV(L)$, to

$$M[x := N][y := L] = M[y := L][x := N][y := L].$$

Zad. 2.14. Rozszerzamy rachunek lambda o nowe sposoby dowodzenia równości (zachowując dotychczasowe) lub o nowe równości:

(a) o η-redukcję $\lambda x.Mx \to_\eta M$ dla $x \notin FV(M)$, a więc w szczególności przyjmujemy, że $\lambda x.Mx =_\eta M$,
(b) o regułę ekstensjonalności stwierdzającą, że jeżeli $x \notin FV(MN)$ i $Mx = Nx$, to $M = N$,
(c) o równość $I = c_1$.

Pokaż, że w każdym z tych przypadków możemy dowieść dokładnie te same równości.

Zad. 2.15. Zadania o grafach $G_\beta(M)$, patrz lista 4.

Zad. 2.16. Czy w λ-rachunku jest prawdziwa równość $(\lambda y.(\lambda x.M))N = \lambda x.((\lambda y.M)N)$? Ewentualnie, w jakich przypadkach ta równość jest prawdziwa? Oczywiście, x i y to różne zmienne.

Zad. 2.17. Udowodnij, że nie istnieje λ-term F taki, że $F(MN) = M$ dla wszystkich termów M i N, chyba że rachunek λ jest sprzeczny.

3 Formalizacja w rachunku lambda wartości boolowskich i liczb naturalnych

Numerały Churcha i Barendregta.

Zad. 3.18. Przedstaw odpowiednie definicje związane z reprezentacją w rachunku lambda wartości boolowskich, operacji logicznych, par uporządkowanych, liczb naturalnych. Czy te reprezentacje są poprawne? Dlaczego. Zdefiniuj w rachunku lambda najważniejsze operacje związane z wartościami boolowskimi i liczbami naturalnymi.

Zad. 3.19. Przyjmijmy, że
$$P = \lambda xyz.\ x(\lambda pq.q(py))(Kz)I.$$
Pokaż, że $Pc_0 = c_0$ oraz $Pc_{n+1} = c_n$.

4 Punkty stałe

Twierdzenia o punkcie stałym. Dowody twierdzeń o punkcie stałym. Operatory punktów stałych: $\lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$, $(\lambda xf.f(xxf))(\lambda xf.f(xxf))$ oraz $\lambda f.\ A_f\ A_f$, gdzie $A_f \equiv \lambda x.\ f(\lambda z.\ xxz)$. Zastosowania. Punkty stałe są bardzo ważne. Kilka zadań o punktach stałych jest na kocu tej listy.

Zad. 4.20. Jakie są istotne własności różniące podane operatory punktu stałego.

Zad. 4.21. Niech $f : N^2 \to N$ będzie całkowitą funkcją rekurencyjną. Znajdź ciąg λ-termów $X_0, X_1, X_2, \ldots$ taki, że $X_m X_n = X_{f(m,n)}$ dla wszystkich $m, n \in N$. Wskazówka. Próbujemy tak zdefiniować term X_n, aby z niego dało się odczytać c_n. Wtedy aplikując X_m do X_n powinniśmy wyznaczyć c_m i c_n, następnie wyliczyć $c_{f(m,n)}$ i z tego termu utworzyć $X_{f(m,n)}$. Najprostszy pomysł definiowania X_m jako $[A, c_m] = \lambda z.\ zAc_m$ też daje dobry rezultat.

Zad. 4.22. Pokaż, że dla dowolnego termu M i dowolnej zmiennej x istnieje term F taki, że $F =_\beta M[x := F]$.

Zad. 4.23. Pokaż, że istnieje M taki, że dla każdego N mamy $MN = MM$.

Zad. 4.24. Term $M \in \Lambda$ jest operatorem (kombinatorem) punktu stałego, jeżeli $F\ (M\ F) = M\ F$ dla wszystkich $F \in \Lambda$. Pokaż, że M jest operatorem punktu stałego wtedy i tylko wtedy, gdy $S\ I\ M = M$. Wskazówka: aby zrobić to zadanie trzeba wiedzieć, że jeżeli $x\ (M\ x) = M\ x$ dla zmiennej $x \notin FV(M)$, to M jest abstrakcją. Ten fakt można próbować uzasadniać w następujący sposób: maksymalnie redukując lewą stronę równości powinniśmy otrzymać wyrażenie postaci $x\ (\ldots)$. Redując prawą stronę też powinniśmy otrzymać to samo wyrażenie, a to jest możliwe tylko wtedy, gdy $M\ x$ jest redeksem.

Zad. 4.25. Pokaż, że $Y(SI) \twoheadrightarrow_\beta \Theta$, gdzie $Y = \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$, a Θ jest zdefiniowane w jednym z poprzednich zadań.

5 λ-obliczalność

Definicja λ-obliczalności. Funkcje rekurencyjne cakowite i częściowe.

Zad. 5.26. Udowodnij, że jeżeli całkowite funkcje $f, g, h : N^2 \to N$ są λ-obliczalne, to λ-obliczalna jest też funkcja $k : N^2 \to N$ zdefiniowana wzorem $k(x, y) = f(g(x, y), h(x, y))$.

Zad. 5.27. Zdefiniuj na dwa sposoby term reprezentujący funkcję $f(n) = n!$. Z operatorem punktu stałego i korzystając z numerałów Churcha jako iteratorów. Można korzystać z wyrażeń reprezentujących w λ-rachunku nastąpnik, poprzednik, mnożenie itp. funkcje.

Zad. 5.28. Znajdź term H taki, że $Hc_{n^2} = c_n$ (lub analogiczny term dla literałów Barendregta).

Zad. 5.29. Funkcję definiowaną przez rekursję prostą wzorami $f(0, n) = g(n)$ oraz $f(m+1, n) = h(f(m, n), m, n)$ można zdefiniować iterując funkcję $k([a, b]) = [a + 1, h(b, a, n)]$ i zauważając, że $k^m([0, g(n)] = [m, f(m, n)]$. W λ-rachunku iterację łatwo wyrazić korzystając z literałów Churcha.

Zad. 5.30. Powyższą ideę wykorzystaliśmy do zdefiniowania termu reprezentującego operację poprzednika dla literałów Churcha. Może więc tę operację da się zdefiniować korzystając z operatora punktu stałego?

6 Równoległa β-redukcja

Równoległa β-redukcja $\Rightarrow_\beta$ (definicja). Twierdzenie Churcha Rossera. Bardzo ważne jest ostatnie zadanie z tej części.

Zad. 6.31. Mówimy, ze relacja $\to \subseteq R^2$ ma własność rombu, jeżeli

$$\forall a, a_1, a_2 (a \to a_1 \wedge a \to a_2) \Rightarrow \exists a_3 (a_1 \to a_3 \wedge a_2 \to a_3)$$

Niech $\twoheadrightarrow$ oznacza zwrotno-przechodnie domknięcie $\to$, a $\sim$ – zwrotno-przechodnio-symetryczne domknięcie $\to$. Udowodnij, że jeżeli $\to$ ma własność rombu, to także $\twoheadrightarrow$ ma własność rombu. Mówimy, ze relacja $\to \subseteq R^2$ jest konfluentna, jeżeli

$$\forall a_1, a_2 (a_1 \sim a_2) \Rightarrow \exists a_3 (a_1 \twoheadrightarrow a_3 \wedge a_2 \to a_3).$$

Udowodnij, ze jeżeli relacja $\twoheadrightarrow \subseteq R^2$ ma własność rombu, to $\to$ jest konfluentna.

Zad. 6.32. Jak z poprzedniego zadania wynika twierdzenie Churcha-Rossera?

Zad. 6.33. Opowiedz o dowodzie twierdzenia Churcha Rossera. Wykaż podstawowe konsekwencje twierdzenie Churcha-Rossera takie, jak niesprzeczność λ-rachunku i jednoznaczność postaci normalnej.

7 Kolorowe redeksy

Redukcja termów z kolorowymi redeksami i jej własności. Rozumowania dotyczące redukcji kolorowych redeksów, było kilka ciekawych.

Zad. 7.34. Wymień własności redukcji termów z kolorowymi redeksami. Jakie własności różnią tę redukcję i β-redukcję.

Zad. 7.35. Pokaż, że term z n kolorowymi redeksami może zostać zredukowany do postaci normalnej (w sensie redukcji z kolorowymi redeksami) w n krokach.

8 Normalna redukcja, obliczalność

Ten temat należy rozszerzyć o inne sposoby rodzaje redukcji (strategie redukowania wyrażeń λ rachunku) oprócz normalnej, a więc o redukcję quasi-normalną, standardową, głowową itp. Ważne jest, czy redukcja gwarantuje znalezienie postaci normalnej, o ile ta istnieje, i dlaczego. Czasem należy dostosowywać wyrażenia do sposobu redukcji, patrz część 1 listy 4.

Zad. 8.36. Przypuśćmy, że chcemy zdefiniować funkcję spełniającą równanie $f\ x = g\ x\ (f\ (p\ x))$. Równość tę możemy rozumieć na dwa sposoby: albo x oznacza liczbę naturalną i fx obliczamy licząc jakąś funkcję g dla 2. argumentu będącego wartością f dla poprzednika x (dla $x = 0$ funkcja g może ignorować 2. argument), albo szukamy termu f, który w λ-rachunku spełnia podaną równość. Oczywiście, szukając f posługujemy się operatorem punktu stałego. Sprawdź, że term $F = Y(\lambda fx.g\ x\ (f\ (p\ x)))$ spełnia podaną równość.

Zad. 8.37. (cd. poprzedniego) W zastosowaniach rachunku λ korzystamy czasem nie z pełnej β-redukcji, a słabszej relacji zdefiniowanej regułami

$$\frac{M_1 \to_\beta M_2}{M_1 M \to_\beta M_2 M}, \quad \frac{M_1 \to_\beta M_2}{M M_1 \to_\beta M M_2} \quad \text{oraz} \quad \frac{}{(\lambda x.M)N \to_\beta M[x/N]},$$

przy czym przekształcając termy zawsze stosujemy pierwszą z reguł, którą możemy zastosować. Zauważmy, że nie potrafimy przekształcać λ-abstrakcji. Pokaż, że term F nie spełnia warunków z poprzedniego zadania dla tak zdefiniowanej relecji redukcji. Pokaż też, że dla takiej redukcji rozwiązanie poprzedniego zadania można znaleźć korzystają z operatora

$$\Theta = \lambda f.AA, \quad \text{gdzie} \quad A = \lambda x.f\ (\lambda y.xxy).$$

Zad. 8.38. Przypuśćmy, że $M \twoheadrightarrow N$. Przyjmijmy, że λ-termy M' i N' otrzymujemy redukując odpowiednio w termach M i N najbardziej lewy (pierwszy) redeks. Pokaż, że $M' \twoheadrightarrow N'$. Podaj przykład świadczący o tym, że na ogół $M' \not\twoheadrightarrow N$. Wskazówka: oczywiście, w tym zadaniu przydatne są termy z kolorowymi redeksami. Trudno jednak pokolorować redeksy od razu, na początku. Raczej trzeba to robić stopniowo.

Zad. 8.39. Ciąg redukcji $M_0 \to M_1 \to M_2 \to \ldots$ (raczej nieskończony) nazywamy quasi-normalnym, jeżeli w tym ciągu dowolnie daleko występują redukcje, w których jest redukowany najbardziej lewy redeks. Pokaż, że jeżeli dla termu M istnieje nieskończony, quasi-normalny ciąg redukcji $M = M_0 \to M_1 \to M_2 \to \ldots$, to term M nie ma postaci normalnej. Wskazówka: skorzystaj z poprzedniego zadania i twierdzenia o normalizacji.

Zad. 8.40. (a) Pokaż, że $\lambda \not\vdash WWW = \omega_3\omega_3$ dla $W = \lambda xy.xyy$ i $\omega_3 = \lambda x : xxx$.

(b) $\lambda \not\vdash B_x = B_y$ dla $B_z = A_z A_z$ i $A_z = \lambda p.ppz$.

9 Systemy typów

Proste systemy typów Curry'ego i ewentualnie Churcha. Definicje systemów i podstawowe własności. Rozstrzygalność relacji typowania i odpowiedni algorytm. Należy spodziewać się na egzaminie czegoś o systemie typów.

Zad. 9.41. Znajdź (o ile istnieją) typy różnych termów, na przykład $\lambda xypq.xp(ypq)$ $\lambda xyz.x(yz)$, $\lambda xy.yx$, c_n, $c_n K$.

Zad. 9.42. (a) Podaj wyprowadzenie stwierdzenia $SK : (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \alpha)$,

(b) Podaj wyprowadzenie stwierdzenia $KI : \beta \to (\alpha \to \alpha)$,

(c) Pokaż, że nie daje się wyprowadzić, że $SK : \alpha \to \beta \to \beta$.

(d) Znajdź wspólny β-redukt termów SK i KI. jaki jest najbardziej ogólny typ tego termu.

Zad. 9.43. Znajdź najbardziej ogólne typy (jeżeli istnieją) następujących termów

(a) numerałów Churcha,

(b) $\lambda xy.xyy$, SII, $\lambda xy.y(\lambda z.z(yx))$,

(c) AA, AB, BA, CC, AAA, ABA, BAB, CCC, gdzie $A = \lambda xyz.x(yz)$, $B = \lambda xy.xy$, $C = \lambda xyz.xzy$ (zadania Tomasza Wierzbickiego).

Zad. 9.44. Znajdź termy M i N takie, że

(a) $M : (\alpha \to \beta) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$.

(b) $N : (((\alpha \to \beta) \to \beta) \to \beta) \to (\alpha \to \beta)$.

10 Zbiór typów

Opis logiczny zbioru typów: odpowiednia logika, aksjomaty, pojęcie dowodu, twierdzenie o dedukcji. Odpowiedniość Curre'go-Howarda.

Zad. 10.45. (Wbrew pozorom, bardzo proste.) Modelem Kripkego $\mathcal{C}$ nazywamy rodzinę zbiorów zmiennych (typowych lub zdaniowych, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(V)$, elementy $\mathcal{C}$ możemy nazywać „światami"). Rodzina taka jest w naturalny sposób uporządkowana za pomocą inkluzji. Zdefiniujemy relację „prawdziwości w świecie" $C \Vdash \varphi$ dla $C \in \mathcal{C}$, φ to oczywiście formuła. Zmienna zdaniowa p jest prawdziwa w świecie C ($C \Vdash p$), jeżeli $p \in C$. Warunek $C \Vdash \alpha \to \beta$ oznacza, że w każdym świecie $C' \in \mathcal{C}$ takim, że $C \subseteq C'$ i $C' \Vdash \alpha$ zachodzi $C' \Vdash \beta$. Formuła jest prawdziwa w modelu $\mathcal{C}$, jeżeli jest prawdziwa w każdym świecie C tego modelu. Pokaż, że formuła dowodliwa w logice z regułą odrywania i aksjomatami będącymi typami S i K jest prawdziwa w każdym modelu Kripkego.

Zad. 10.46. Pokaż, że żaden λ-term bez zmiennych wolnych nie jest typu $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$.

Zad. 10.47. Sformułowanie twierdzenia o silnej normalizowalność dla rachunku lambda z typami. Konsekwencje tego twierdzenia.

Zad. 10.48. Przyjmijmy, że

(a) SN to zbiór silnie normalizowalnych termów,

(b) $SN_1 = \{M \in \Lambda : \forall \vec{N} \in SN\ M\vec{N} \in SN\}$,

(c) $SN_2 = \{M \in \Lambda : \forall \vec{N} \in SN_1\ M\vec{N} \in SN_1\}$.

Udowodnij, że $SN_2 = SN_1 \subseteq SN$ oraz $SN_1 \neq SN$.

11 Model lambda rachunku z typami

Zad. 11.49. Udowodnij, że w zdefiniowanym na wykładzie modelu λ-rachunku zachodzi η-redukcja, czyli termy M oraz $\lambda x : \alpha\ Mx$ mają to samo znaczenie (przy założeniu, że x nie jest wolna w M).

12 Różne (czasem trudne)

Zad. 12.50. Rozszerzamy rachunek lambda o nowe sposoby dowodzenia równości (zachowując dotychczasowe) lub nowe o nowe równości:

(a) o η-redukcję $\lambda x.Mx \to_\eta M$ dla $x \notin FV(M)$, a więc w szczególności przyjmujemy, że $\lambda x.Mx =_\eta M$,

(b) o regułę ekstensjonalności stwierdzającą, że jeżeli $x \notin FV(MN)$ i $Mx = Nx$, to $M = N$,

(c) o równość $I = c_1$.

Pokaż, że w każdym z tych przypadków możemy dowieść dokładnie te same równości.

Zad. 12.51. Następujące warunki są równoważne:

(a) $SIM = M$,

(b) $MF = F(MF)$ dla wszystkich termów F.

Wskazówka: Jeżeli $Mf = f(Mf)$ dla zmiennej f, to $Mf \twoheadrightarrow_\beta f(\ldots)$. Stąd M jest abstrakcją i $M = \lambda f.Mf$.

Zad. 12.52. Termy $Y(SI)$, $Y^2(SI)$ są operatorami punktów stałych. To samo dotyczy termów postaci $\lambda f.(\lambda xz.f(xxz))(\lambda xz.f(xxz))M$.

Zad. 12.53. Jeżeli term M jest rozwiązalny, to jest niezgodny z YK.

Zad. 12.54. Term $Y(\lambda cab.b(cb(ca)))$ jest rozwiązalny, ale nie postaci normalnej.