Lista zadań nr 9 z rachunku lambda
14 maja 2019

Ważniejsze własności systemu typów (zad. 1 – 4).

Zad. 1. Pokaż, że jeżeli term ma typ w pewnym kontekście, to każdy jego podterm też ma typ w pewnym kontekście.

Zad. 2. Pokaż, że jeżeli $\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma$ oraz $\Gamma \vdash N : \tau$, to $\Gamma \vdash M[x := N] : \sigma$.

Zad. 3. Pokaż, że jeżeli $\Gamma \vdash M : \sigma$ oraz $M \to_\beta N$, to $\Gamma \vdash N : \sigma$. Jak można uogólnić to zadanie?

Zad. 4. Pokaż, że jeżeli $\Gamma \vdash M : \sigma$ oraz $\Gamma \vdash M : \tau$ w systemie typów prostych à la Church, to $\sigma = \tau$.

Zad. 5. Przypuśćmy, że $x \in FV(M)$ i $\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau$. Wtedy dla każdej zmiennej $y \notin dom(\Gamma)$ podstawialnej za x w termie M mamy $\Gamma, y : \sigma \vdash M[x := y] : \tau$.

Zad. 6. Pokaż, że jeżeli $\Gamma \vdash \lambda x\, M : \sigma \to \tau$, zmienna $y \notin dom(\Gamma)$ i jest podstawialna za x w termie M, to $\Gamma \vdash \lambda y\, M[x := y] : \sigma \to \tau$. Wywnioskuj stąd, że jeżeli $\Gamma \vdash \lambda x\, M : \sigma \to \tau$, to właściwie $\Gamma, x : \rho \vdash \lambda x\, M : \sigma \to \tau$.

Związek typów z logiką. Rozważamy teraz rachunek zdań z jednym spójnikiem, implikacją, i następującymi regułami dowodzenia

$$\frac{}{A, \varphi \vdash \varphi}, \quad \frac{A, \varphi \vdash \psi}{A \vdash \varphi \to \psi} \quad \text{oraz} \quad \frac{A \vdash \varphi, A \vdash \varphi \to \psi}{A \vdash \psi}.$$

Zwyczajowo w takich sytuacjach często pisze się Γ zamiast A, A to zbiór formuł. Związek $A \vdash \varphi$ można interpretować jako stwierdzenie, że (w tej logice) z aksjomatów lub założeń z A daje się wywnioskować φ. Relacja $A \vdash \varphi$ to oczywiście najmniejsza relacja zamknięta na wymienione reguły. Często A będzie zbiorem $|\,\Gamma\,|$ wartości kontekstu Γ (typów występujących w γ). Pisząc A, φ nie zakładamy, że $\varphi \notin A$.

Zad. 7. Pokaż, że jeżeli $\Gamma \vdash M : \varphi$ (w prostym systemie typów), to $|\,\Gamma\,| \vdash \varphi$ (w roważanej logice).

Zad. 8. Pokaż, że jeżeli wartościowanie zmiennych zdaniowych spełnia wszystkie formuły należące do A i $A \vdash \varphi$, to spełnia także formułę φ.

Zad. 9. Pokaż, że jeżeli $A \vdash \varphi$, to $\Gamma \vdash M : \varphi$ dla pewnego termu M i pewnego kontekstu Γ. Wskazówka: dla każdej formuły $\sigma \in A$ wybieramy zmienną x_σ i tworzymy kontekst $\Gamma = \{x_\sigma : \sigma \mid \sigma \in A\}$. Być może do tego kontekstu trzeba będzie dodać jeszcze inne zmienne typu $\sigma \in A$. Trzeba pamiętać o drobnej różnicy w traktowaniu napisów $\Gamma, x : \varphi$ oraz A, φ.

Unifikacja nieco inaczej niż zwykle. Będziemy przez chwilę zajmować się unifikacją. Zwykle wtedy rozważa jakieś zmienne i symbole funkcyjne. Nam wystarczy język z jednym dwuargumentowym symbolem funkcyjnym. Równaniem będziemy nazywać parę termów t_1 i t_2, którą będziemy zapisywać w postaci $t_1 = t_2$. Układ równań to zbiór równań. Podstawienie to funkcja przepisująca termy zmiennym z pewnego, skończonego zbioru. Można przyjąć, że każde podstawienie θ zmiennej x spoza faktycznej dziedziny też coś przyporządkowuje i jest to x. Jeżeli t jest termem, a θ – podstawieniem, to $t\theta$ jest termem otrzymany przez jednoczesne zastąpienie zmiennych występujących w t termami przypisanymi im przez podstawienie θ. Podstawienie θ jest unifikatorem (rozwiązaniem) układu równań, jeżeli po wykonaniu podstawienia θ we wszystkich termach układu, wszystkie występujące w nim równania staną się parami identycznych termów. Mając dwa podstawienia θ_1 i θ_2, efekt wykonania napierw podstawienia θ_1, a następnie θ_2 możemy uzyskać wykonując pewne podstawienie θ. To podstawienie $\theta = \theta_1\theta_2$ jest jednoznaczenie wyznaczone i nazywa się złożeniem podstawień θ_1 i θ_2. Jeżeli θ_1 jest unifikatorem pewnego układu równań, to także złożenie $\theta_1\theta_2$ jest unifikatorem. W tej sytuacji θ_1 nazywamy bardziej ogólnym unifikatorem niż $\theta_1\theta_2$. Problemem unifikacji nazywamy zadanie polegające na sprawdzeniu, czy dany układ równań (dane równanie) ma unifikator (rozwiązanie). Mam nadzieję, że wszystkie te pojęcia są znane z wykładu logiki.

Mówimy, że układ równań jest w postaci rozwiązanej, jeżeli

1) lewa strona każdego równania jest zmienną,

2) każda zmienna po lewej stronie równania występuje najwyżej jeden raz.

Zauważmy, że równania $x = y$ i $y = x$ trochę się różnią! Przypuśćmy, że mamy układ równań, a w nim równanie $x = t$. Mówimy, że zmienna x zależy od każdej zmiennej występującej w termie t. Relacja zależenia między zmiennymi definiuje graf skierowany w zbiorze zmiennych.

Zad. 10. Pokaż, że jeżeli w układzie w postaci rozwiązanej, bez równań postaci $x = y$ ze zmiennymi po obu stronach, pewna zmienna zależy od siebie (graf zależności między zmiennymi zawiera cykl), to układ ten nie ma rozwiązania. W przeciwnym razie, skonstruuj unifikator danego układu, a przynajmniej dowiedź jego istnienie.

Zad. 11. Pokaż, że problem unifikacji układu w postaci rozwiązanej redukuje się do problemu unifikacji układu w postaci rozwiązanej, bez równości między zmiennymi.

Zad. 12. Pokaż, że problem unifikacji redukuje się do problemu unifikacji układu w postaci rozwiązanej.