Równania i nierówności liniowe
Lista zadań nr 1

Zad. 1. Sformalizuj z wszystkimi, istotnymi szczegółami znany algorytm rozwiązywania układu m równań liniowych z n zmiennymi. Jaka jest złożoność algorytmu, który otrzymałeś?

Zad. 2. (Metoda eliminacji Fouriera-Motzkina (badania, czy układ nierówności na rozwiązanie)). Przypuśćmy, że mamy dany układ nierówności liniowych ze zmiennymi $x_1, \ldots, x_n$. Wybieramy jedną ze zmiennych (np. zmienną x_n) i dany układ przekształcamy tak, aby nierówności z tą zmienną przyjęły postać

$$x_n \leqslant a_1x_1 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1} \ \text{ lub } \ b_1x_1 + \ldots + b_{n-1}x_{n-1} \leqslant x_n.$$

Następnie otrzymane w ten sposób nierówności (takie, jak wyżej) zastępujemy przez wszystkie nierówności postaci

$$b_1x_1 + \ldots + b_{n-1}x_{n-1} \leqslant a_1x_1 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1}.$$

Na ogół, wielokrotnie stosując opisane przekształcenia, otrzymujemy układ nierówności bez zmiennych. Posługując się przedstawioną ideą opracuj algorytm pozwalający na sprawdzanie, czy dany układ nierówności ma rozwiązanie. Jak jest złożoność Twojego algorytmu?

Zad. 3. (Łatwe tylko w jedną stronę.) Przypuśćmy, że rozważamy system wyprowadzania wniosków o nierównościach liniowych pozwalający z nierówności

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \leqslant a \ \text{ i } \ b_1x_1 + \ldots + b_nx_n \leqslant b$$

(o współczynnikach wymiernych) wyprowadzić nierówność

$$(\lambda a_1 + \gamma b_1)x_1 + \ldots + (\lambda a_n + \gamma b_n)x_n \leqslant (\lambda a + \gamma b)$$

dla dowolnych liczb wymiernych $\lambda, \gamma \geqslant 0$, oraz pozwalający wyprowadzić z

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \leqslant a$$

nierówność

$$\lfloor a_1 \rfloor x_1 + \ldots + \lfloor a_n \rfloor x_n \leqslant \lfloor a \rfloor.$$

Udowodnij, że układ nierówności liniowych ma rozwiązanie całkowite wtedy i tylko wtedy, gdy nie można z niego wyprowadzić w podany sposób nierówności $0 \leqslant -1$.

Zad. 4. (To i następne zadanie dotyczą interpretacji geometrycznej wyrażeń liniowych.) W przestrzeni (geometrycznej) wprowadzamy prostokątny układ współrzędnych o początku O. Rozważmy dwa punkty A i B o współrzędnych równych odpowiednio (x_1, x_2, x_3) i (y_1, y_2, y_3). Rozważamy trójkąt OAB. Niech α będzie kątem tego trójkąta przy wierzchołku O. Przyjmij sobie twierdzenie cosinusów i korzystając z niego wyraź wyrażenie $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ za pomocą α.

Zad. 5. Niech $\vec{a}, \vec{x} \in R^3$. Przyjmijmy, że

$$\vec{a}\vec{x} = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3.$$

Podaj interpretację geometryczną następujących zbiorów ($\vec{a}, \vec{a_i}$ są ustalonymi elementami R^3):

1) $\{\vec{x} \in R^3 : \vec{a}\vec{x} = 0\}$,

2) $\{\vec{x} \in R^3 : \vec{a}\vec{x} \geqslant 0\}$,

3) $\{\vec{x} \in R^3 : \vec{a_1}\vec{x} = 0 \land \vec{a_2}\vec{x} = 0\}$,

4) $\{\vec{x} \in R^3 : \vec{a_1}\vec{x} = 0 \land \vec{a_2}\vec{x} = 0 \land \vec{a_3}\vec{x} = 0\}$.

Zad. 6. **(Pozostałe zadania dotyczą zastosowania algorytmu eliminacji Gaussa . Nie tylko rozwiąż podane przykłady: opracuj również metody rozwiązywania takich zadań, wykorzystujące eliminację Gaussa.)** Sprowadź macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 & 5 \\ 4 & 0 & 4 & -2 \\ 7 & 2 & 0 & 2 \\ -6 & 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

do wierszowo równoważnej postaci trójkątnej.

Zad. 7. Zbadaj wierszową równoważność macierzy

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ -3 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zad. 8. Rozwiąż równanie

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ -x + y - z &= 1 \\ 2x + 3y &= 1. \end{aligned}$$

Zad. 9. Czy następujące układy wektorów są liniowo niezależne:

1) $(1, 6, -2, 5), (4, 0, 4, -2), (7, 2, 0, 2), (-6, 3, -3, 3)$,

2) $(2, 4, 3 - 1, -2, 1), (1, 1, 2, 1, 3, 1), (0, -1, 0, 3, 6, 2)$.

Zad. 10. Czy wektory $(1, 2, 1, 2), (3, 2, 3, 2), (-1, -3, 0, 4), (0, 4, -1, -3)$ generują przestrzeń R^4.

Zad. 11. Znajdź bazę przestrzeni generowanej przez wektory $(2, 4, 3, -1, -2, 1), (1, 1, 2, 1, 3, 1), (0, -1, 0, 3, 6, 2)$. Jaki jest wymiar tej przestrzeni? Czy są to wektory liniowo niezależne?

Zad. 12. Znajdź bazę przestrzeni rozwiązań układu równań

$$\begin{aligned} x + y + z + t &= 0 \\ 2x + 3y - z + t &= 0 \\ 3x + 4y + 2t &= 0. \end{aligned}$$

Zad. 13. Oblicz macierz odwrotną do macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zad. 14. Spróbuj wykorzystać algorytm sprowadzania macierzy do równoważnej wierszowo macierzy trójkątnej do mnożenia macierzy. Aby pomnożyć macierze A i B należy rozważać macierz

$$\begin{bmatrix} -1 & & 0 & & \\ & \ddots & & B & \\ 0 & & -1 & & \\ & & & 0 & 0 \\ & A & & & \ddots \\ & & & 0 & 0 \end{bmatrix}$$