Równania i nierówności liniowe
Lista nr 2

Zad. 1. Zauważ, że operacje na wierszach macierzy A można wykonać mnożąc A przez odpowiednie macierze. W podobny sposób można wyrazic przestawianie kolumn macierzy A.

Zad. 2. Rozkładem LUP macierzy A nazywamy przedstawienie macierzy A w postaci iloczynu LUP trzech macierzy L, U i P takich, że

1) L jest kwadratową macierzą trókątną dolną (a więc z zerami powyżej przekątnej), z niezerowymi elementami na przekątnej,

2) U jest macierzą trókątną górną (a więc z zerami poniżej przekątnej), z niezerowymi elementami na przekątnej,

3) P jest macierzą permutacyjną (a więc w każdej kolumnie i w każdym wierszu ma dokładnie jedną jedynkę i – poza jedynkami – same zera)

Niektóre macierze nie mają rozkładu LUP. Opracuj algorytm pozwalający na znajdowanie rozkładu LUP danej macierzy, o ile taki rozkład istnieje. Wskazówka: odpowiednio zmodyfikuj algorytm eliminacji Gaussa, nie przestawiaj wierszy, za to przestawiaj kolumny przekształcanej macierzy. Dla jakich macierzy istnieje rozkład LUP? Może ta metoda prowadzi do algorytmu o niedużej złożoności?

Zad. 3. Pokaż, jak można rozwiązać układ równań liniowych mając dany rozkład LUP macierzy tego układu.

Zad. 4. Ile najmniej mnożeń trzeba wykonać obliczając wartość wyrażenia

$$x^2 + y^2 + 3z^2 + t^2 + 2xy + 3xt - 6yz + 4yt + 7zt?$$

(to zadanie chyba da się rozwiązać, wymyślenie teorii może jednak być trudne).

Zad. 5. Zauważ, że następujące układy wektorów są bazami w R^4:

1) $(1, 0, 0, 1)$, $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 0, -1, 1)$, $(0, 1, 0, 1)$

2) $(1, 0, 0, 1)$, $(0, 0, 0, 1)$, $(1, -1, 0, 0)$, $(1, 0, 1, 0)$

Przedstaw wektor (a, b, c, d) w każdej z podanych baz.

Zad. 6. Wektor (a, b, c, d) można utożsamiać z macierzą

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Znajdź iloczyny macierzy, z których pierwsza odpowiada wektorowi z pierwszej linijki z poprzedniego zadania, a druga – wektorowi z drugiej linijki. Przeanalizuj otrzymane wyniki.

Zad. 7. Zauważ, że korzystając z poprzednich zadań można opracować metodę mnożenia macierzy 2×2. Podaj tę metodę.

Zad. 8. (trudne) Pierścienie M_n macierzy o wymiarach $n \times n$ są algebrami, tzn. są przestrzeniami liniowymi z mnożeniem. Przypuśćmy, że w przestrzeni M_n istnieją bazy $X_1, \ldots, X_m$ oraz $Y_1, \ldots, Y_m$ takie, że dla wszystkich $i, j \leqslant m$ iloczyny $X_i \cdot Y_j$ są równe $a_{i,j} X_i + b_{i,j} Y_j$ dla pewnych $a_{i,j}$ oraz $b_{i,j}$. Udowodnij, że wtedy $n \leqslant 2$, a więc za pomocą metody z poprzednich zadań nie można mnożyć macierzy o wymiarach większych niż 2×2.

Zad. 9. Rozważmy fragment algorytmu mnożenia macierzy $A = [a_{i,j}]$ i $B = [b_{i,j}]$ o wymiarach $h \times h$:

1) dla wszystkich i, j, l spełniających $1 \leqslant i, j, l \leqslant h$ oblicz
   (a) $u_{i,j} := (a_{i,j} + a_{i,i}) \cdot b_{j,j}$
   (b) $v_{i,j} := a_{i,i} \cdot (b_{i,j} - b_{j,j})$
   (c) $w_{i,j} := (a_{i,j} - a_{j,j}) \cdot \sum_s b_{j,s}$
   (d) $p_{i,j,l} := a_{i,l} \cdot b_{l,j}$ dla wszystkich układów i, j, l parami różnych indeksów
   (e) $q := (\sum_s a_{s,s}) \cdot (\sum_s b_{s,s})$
2) ...

Uzupełnij ten fragment o pewną liczbę instrukcji nie zawierających operacji mnożenia tak, aby otrzymać poprawny algorytm mnożenia macierzy. Zbadaj, czy w ten sposób można zdefiniować sposób mnożenia macierzy, który pozwala ulepszyć algorytm Strassena.