Równania i nierówności liniowe
Lista zadań nr 4

Zad. 1. Zauważ, że prawdziwe są następujące nierówności:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant (\sum_{i=1}^{n} |\, x_i \,|)^2,$$

$$1 + \sum_{i=1}^{n} |\, x_i \,| \leqslant \prod_{i=1}^{n} (1 + |\, x_i \,|),$$

$$1 + \prod_{i=1}^{n} |\, x_i \,| \leqslant \prod_{i=1}^{n} (1 + |\, x_i \,|).$$

Zad. 2. Przypuśćmy, że rozważamy wektor $\vec{x} \in Z^n$ i macierz $C \in Z^{n \times n}$. Udowodnij, że

$$|\, \vec{x} \,| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\, x_i \,| \leqslant 2^{\langle \vec{x} \rangle - n} - 1,$$

$$|\,|\, C \,|\,| \leqslant 2^{\langle C \rangle - n^2} - 1,$$

$$\langle |\, C \,| \rangle \leqslant \langle C \rangle - n^2 + 1,$$

gdzie $|\,|\, C \,|\,|$ oznacza moduł wyznacznika macierzy C, a $\langle x \rangle$ – rozmiar danej x (jeżeli algorytm eliminacji Gaussa wymaga jedynie pamiętania wyznaczników podmacierzy danej macierzy, to z ostatniej nierówności wynika, że (przynajmniej dla macierzy o wyrazach całkowitych) wykorzystuje wielomianową (liniową) pamięć, w dowodzie potrzebna jest nierówność Hadamarda: moduł wyznacznika macierzy C nie przekracza iloczynu długości wektorów-wierszy macierzy C).

Zad. 3. Udowodnij, że algorytm

$$l := 2; for\ i := 1\ to\ \langle n \rangle\ do\ l := l * l$$

z daną n może zostać zrealizowany na wielomianowej maszynie RAM, ale nie jest algorytmem korzystającym z wielomianowej pamięci.

Zad. 4. Udowodnij, że wielomianowy algorytm, który na maszynie RAM korzysta z wielomianowej pamięci może zostać zrealizowany na wielomianowej maszynie Turinga.

Zad. 5. Udowodnij, że problem, czy dany układ nierówności liniowych o współczynnikach całkowitych ma całkowite rozwiązanie jest (silnie) NP-zupełny przy założeniu, że należy do klasy NP (zredukuj do tego problemu problem niesprzeczności diofantycznych układów równań liniowych, zadanie to można sformułować w następujący sposób: opisany problem jest NP-trudny).

Zad. 6. Udowodnij, że następujący problem plecakowy jest NP-zupełny: czy plecak o danej pojemności można wypełnić danymi przedmiotami o określonych objętościach (dane są przedmioty, każdy z nich jest scharakteryzowany przez objętość; tak więc liczba przedmiotów nie przekracza rozmiaru danych, można myśleć, że każdy przedmiot jest dany w jednym egzemplarzu).

Zad. 7. Podaj algorytm oparty o podaną niżej ideę, rozwiązujący problem plecakowy z poprzedniego zadania: dla przedmiotów o objętościach $a_1, \ldots, a_n$ i dla każdego $i \leqslant n$ tworzymy listę objętości postaci $a_{j_1} + \ldots + a_{j_k}$, $j_1 < \ldots < j_k \leqslant i$ i sprawdzamy, czy na tej liście znajduje się objętość plecaka. Sprawdź, czy zdefiniowany algorytm jest pseudowielomianowy.

Zad. 8. Zredukuj bezpośrednio i wielomianowo problem 3SAT do problemu niesprzeczności diofantycznych układów równań liniowych i do problemu niesprzeczności układów nierówności liniowych o rozwiązaniach całkowitych.

Zad. 9. Udowodnij NP-trudność następującego problemu: czy dany niesprzeczny (a więc mający rozwiązanie) układ nierówności liniowych ma rozwiązanie całkowite. Wskazówka: skorzystaj z redukcji z poprzedniego zadania.