3 Podstawy algebraiczne

3.1 Przykłady przestrzeni liniowych

Będziemy zajmować się przestrzeniami liniowymi nad ciałem k. Najczęściej będą to przestrzenie skończonego wymiaru. Symbole U, V, W uzupełnione o indeksy (jeżeli zajdzie taka potrzeba) będą oznaczać takie właśnie przestrzenie. Czasem będą też potrzebne przestrzenie liniowe, dla których współczynniki (skalary) będą należały do przemiennego pierścienia, najczęściej pierścienia wielomianów $k[\varepsilon]$ nad danym ciałem k. Takie struktury nazywa się modułami. Prawie wszystkie przedstawione własności przestrzeni liniowych są prawdziwe także w przypadku mudułów nad pierścieniem wielomianów i będą w tym przypadku stosowane.

3.1.1 Przestrzenie wektorów i macierzy

Przestrzeń k^n jest znaną przestrzenią wektorów o n współrzędnych. Tak więc $k^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in k\}$. Dodawanie i mnożenie w tej przestrzeni jest definiowane wzorami

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \ \text{ oraz } \ a(x_1, \ldots, x_n) = (ax_1, \ldots, ax_n).$$

Wektor $e_i \in k^n$ ma wszystkie współrzędne równe 0 z wyjątkiem i-tej, która jest równa 1. Wektory $e_1, \ldots, e_n$ tworzą standardową bazę przestrzeni k^n.

Symbolem $k^{m\times n}$ będziemy oznaczać przestrzeń macierzy o m wierszach długości n. Jest to właściwie przestrzeń k^{mn}. W porównaniu z k^{mn}, w przestrzeni $k^{m\times n}$, nie ingerując w strukturę algebraiczną, dodatkowo wprowadziliśmy pewną klasyfikację współrzędnych wektorów: współrzędne zostały podzielone na wiersze i kolumny. Za standardową (kanoniczną) bazą przestrzeni $k^{m\times n}$ będziemy uważać układ macierzy $E_{i,j}$ dla $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Macierz $E_{i,j}$ ma wszystkie wyrazy są równe 0 z wyjątkiem wyrazu równego 1 i znajdującego się w i-tym wierszy na j-tej pozycji. Jeżeli konieczne będzie pamiętanie wymiarów macierzy $E_{i,j}$, to zamiast tego symbolu będziemy pisać $E_{i,j}^{m\times n}$.

3.1.2 Przekształcenia wieloliniowe

Funkcja $f : U \to W$ jest liniowa, jeżeli jest addytywna i jednorodna, a więc jeżeli spełnia dla wszystkich $x, y \in U$ i $a \in k$ równości

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \ \text{ oraz } \ f(ax) = af(x).$$

Funkcję $f : U_1 \times \ldots \times U_n \to W$ nazywamy przekształceniem n-liniowym, jeżeli staje się funkcją liniową po ustaleniu w dowolny sposób wartości wszystkich z wyjątkiem jednej zmiennej.

Zależnie od wartości n mówimy o przekształceniach dwuliniowych, trójliniowych, czteroliniowych itd. Ciało k jest także przestrzenią liniową nad k. Przekształcenia wieloliniowe przyjmujące wartości w ciele k nazywamy funkcjonałami wieloliniowymi.

3.1.3 Przestrzeń przekształceń liniowych

Symbolem $Lin(U, W)$ oznaczamy przestrzeń przekształceń liniowych przekształcających U w W. Działania w tej przestrzeni określamy w zwykły sposób:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \ \text{ oraz } \ (af)(x) = af(x)$$

dla dowolnych $f, g \in Lin(U, W)$, $x \in U$ oraz $a \in k$. Łatwo sprawdzić, że $Lin(U, W)$ z tak określonymi działaniami jest przestrzenią liniową.

3.1.4 Definiowanie przekształceń liniowych

Zbiór $G \subseteq U$ generuje przestrzeń U, jeżeli

$$U = \{\sum_{i=1}^{n} a_i g_i : n \in N \wedge a_1, \ldots, a_n \in k \wedge g_1, \ldots, g_n \in G\}.$$

Znany jest oczywisty

Fakt 3.1 *Jeżeli G generuje U i funkcje liniowe $f, h \in Lin(U, W)$ przyjmują te same wartości dla każdego $g \in G$, to przyjmują te same wartości dla wszystkich $u \in U$.* □

Zauważmy, że bazy w przestrzeniach liniowych można definiować jako liniowo niezależne zbiory generatorów.

Lemat 3.2 *Jeżeli $X = \{u_1, \ldots, u_n\}$ jest bazą przestrzeni U i mamy (dowolną) funkcję $f : X \to W$, to istnieje funkcja liniowa $\tilde{f} \in Lin(U, W)$ taka, że $\tilde{f}(u_i) = f(u_i)$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$. Co więcej, z faktu 3.1 wynika, że taka funkcja $\tilde{f}$ jest tylko jedna.*

Dowód. Aby zdefiniować wartość funkcji $\tilde{f}$ dla argumentu $u \in U$, przedstawiamy u w postaci kombinacji liniowej $\sum_{i=1}^{n} a_i u_i$ elementów bazy X, a następnie przyjmujemy, że $\tilde{f}(u) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(u_i)$. Poprawność tej definicji wynika z jednoznaczności przedstawienia dowolnego elementu w postaci kombinacji liniowej wektorów bazowych. Tak zdefiniowana funkcja jest liniowa. □

3.1.5 Przestrzeń funkcjonałów liniowych

Szczególnie ważny jest przypadek przestrzeni $Lin(U, k)$ funkcjonałów liniowych określonych na U (funkcji liniowych o wartościach w ciele k). Przestrzeń tę oznaczamy zwykle symbolem U^*.

Niech U będzie przestrzenią liniową z bazą $u_1, \ldots, u_n$. Funkcjonałowi $f \in U^*$ przyporządkujmy wektor $I(f) = (f(u_1), \ldots, f(u_n)) \in k^n$. Nietrudno zauważyć, że przyporządkowanie I jest izomorfizmem przestrzeni U^* i k^n (liniowość I jest łatwa do sprawdzenia, to, że I jest typu „na" wynika z lematu 3.2, a różnowartościowość - z faktu 3.1).

Stąd otrzymujemy, że funkcjonały δ_i takie, że $I(\delta_i) = e_i$, a więc zcharakteryzowane równościami

$$\delta_i(u_j) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } i = j \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases} \tag{1}$$

stanowią bazę U^*.

Funkcjonał δ_i ma ważną interpretację algebraiczną: przyporządkowuje elementowi $x \in U$ jego i-tą współrzędną w bazie $u_1, \ldots, u_n$. Tak więc

$$\delta_i(\sum_{j=1}^{n} a_j u_j) = a_i.$$

Aby znaleźć przedstwienie funkcjonału f w bazie $\delta_1, \ldots, \delta_n$ zauważmy, że

$$I(f) = (f(u_1), \ldots, f(u_n)) = \sum_{i=1}^{n} f(u_i) e_i = \sum_{i=1}^{n} f(u_i) I(\delta_i) = I(\sum_{i=1}^{n} f(u_i)\delta_i).$$

Stąd otrzymujemy, że

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\delta_i. \tag{2}$$

3.1.6 Przestrzeń przekształceń dwuliniowych

Symbol $Bil(U,V,W)$ będzie oznaczać przestrzeń dwuliniowych przekształceń określonych na $U \times V$ i przyjmujących wartości w przestrzeni W. Działania w tej przestrzeni definiujemy w zwykły sposób: dla $f,g \in Bil(U,V,W)$ oraz $u \in U$, $v \in V$ i $a \in k$ przyjmujemy, że

$$(f+g)(u,v) = f(u,v) + g(u,v) \text{ oraz } (af)(u,v) = af(u,v).$$

Analogicznie definiujemy przestrzeń przekształceń n-liniowych.

3.1.7 Definiowanie przekształceń dwu- i wieloliniowych

Jeżeli mówimy o przekształceniach dwuliniowych, to produkt $U \times V$ rozumiemy jako „dwie przestrzenie U i V", a więc coś, co nie ma tej struktury algebraicznej, którą często wprowadzamy w produkcie $U \times V$.

Fakt 3.3 *Jeżeli G i H generują odpowiednio U i V, oraz funkcje dwuliniowe $f,h \in Bil(U,V,W)$ przyjmują te same wartości dla każdej pary $(g,h) \in G \times H$, to przyjmują te same wartości dla wszystkich $(u,v) \in U \times V$.*

Dowód. Dla przekształcenia dwuliniowego f prawdziwy jest wzór

$$f(\sum_{i=1}^{n} a_i g_i, \sum_{j=1}^{m} b_j h_j) = \sum_{i,j=1}^{n,m} a_i b_j f(g_i, h_j).$$

Wzór ten pozwala wyliczyć dowolną wartość $f(u,v)$ dowolnego przekształcenia dwuliniowego znając wartości $f(g,h)$ i stąd wynika teza faktu. □

Lemat 3.4 *Jeżeli $X = \{u_1, \ldots, u_n\}$ i $Y = \{v_1, \ldots, v_m\}$ są odpowiednio bazami przestrzeni U i V, i mamy (dowolną) funkcję $f : X \times Y \to W$, to istnieje przekształcenie dwuliniowe $\tilde{f} \in Bil(U,V,W)$ takie, że $\tilde{f}(u_i, v_j) = f(u_i, v_j)$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Co więcej, z faktu 3.3 wynika, że takie przekształcenie $\tilde{f}$ jest tylko jedno.*

Dowód. Aby zdefiniować wartość funkcji $\tilde{f}$ dla argumentów $u \in U$ i $v \in V$, przedstawiamy u w postaci kombinacji liniowej $\sum_{i=1}^{n} a_i u_i$ elementów bazy X oraz v w postaci kombinacji liniowej $\sum_{j=1}^{m} b_j v_j$ elementów bazy Y, a następnie przyjmujemy, że $\tilde{f}(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n,m} a_i b_j f(u_i, v_j)$. Poprawność tej definicji wynika z jednoznaczności przedstawienia dowolnego elementu w postaci kombinacji liniowej wektorów bazowych. □

Uogólniając przedstawione rozumowania można pokazać, że przekształcenia n-liniowe mają analogiczne własności.

3.1.8 Przestrzeń funkcjonałów dwuliniowych

Przypuśćmy, że $u_1, \ldots, u_m$ oraz $v_1, \ldots, v_n$ są odpowiednio bazami przestrzeni U i V. Wtedy przestrzeń funkcjonałów dwuliniowych $Bil(U,V,k)$ jest izomorficzna z przestrzenią macierzy $k^{m \times n}$. Izomorfizmem jest funkcja I przyporządkowująca funkcjonałowi f macierz

$$I(f) = \begin{pmatrix} f(u_1,v_1) & \ldots & f(u_1,v_n) \\ & \ddots & \\ f(u_m,v_1) & \ldots & f(u_m,v_n) \end{pmatrix}.$$

Świadczące o tym argumenty są analogiczne do przytoczonych w rozdziale 3.1.5. Wobec tego bazą przestrzeni $Bil(U, V, k)$ jest zbiór funkcjonałów $\delta_{i,j}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ spełniających równości

$$\delta_{i,j}(u_k, v_l) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } i = k \text{ oraz } j = l \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases} \tag{3}$$

Oczywiście, $I(\delta_{i,j}) = E_{i,j}$.

Niech $\delta_i^U \in U^*$ i $\delta_j^V \in V^*$ będą funkcjonałami zdefiniowanymi tak, jak w rozdziale 3.1.5 odpowiednio dla przestrzeni U i V. Zauważmy, że

$$\delta_{i,j}(u, v) = \delta_i^U(u)\delta_j^V(v). \tag{4}$$

Oczywiście, obie strony powyższego wzoru są dwuliniowymi funkcjonałami. Co więcej, wzór ten zachodzi dla wszystkich wektorów bazowych u_i oraz v_j. Można więc wywnioskować go z faktu 3.3.

Zauważmy jeszcze, że

$$I(f) = \begin{pmatrix} f(u_1, v_1) & \ldots & f(u_1, v_n) \\ & \ddots & \\ f(u_m, v_1) & \ldots & f(u_m, v_n) \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{m,n} f(u_i, v_j)E_{i,j} = \sum_{i,j=1}^{m,n} f(u_i, v_j)I(\delta_{i,j}) =$$
$$= I(\sum_{i,j=1}^{m,n} f(u_i, v_j)\delta_{i,j}).$$

Stąd otrzymujemy, że

$$f = \sum_{i,j=1}^{m,n} f(u_i, v_j)\delta_{i,j}. \tag{5}$$

W ten sposób znaleźliśmy przedstawienie dowolnego $f \in Bil(U, V, k)$ w postaci kombinacji liniowej wektorów bazy złożonej z funkcjonałow $\delta_{i,j}$.

3.1.9 Przestrzeń przekształceń dwuliniowych (raz jeszcze)

Przestrzeń $Bil(U, V, W)$ można utożsamiać z przestrzenią „trójwymiarowych macierzy". Pozwala to powtórzyć rozumowania z rozdziałów 3.1.5 i 3.1.8, i uzyskać analogiczne rezultaty. W tej chwili postąpimy jednak w inny sposób.

Wybierzmy bazy $u_1, \ldots, u_m$, $v_1, \ldots, v_n$ oraz $w_1, \ldots, w_k$ odpowiednio z przestrzeni U, V i W. Weźmy też przekształcenia δ_k^W zdefiniowane dla przestrzeni W tak, jak przekształcenie δ_k w rozdziale 3.1.5 oraz $\delta_{i,j}^{U\times V}$ zdefiniowane dla przestrzeni U i V tak, jak przekształcenie $\delta_{i,j}$ w rozdziale 3.1.8. Niech $f \in Bil(U, V, W)$. Z wzorów (2) i (5) mamy

$$f(u, v) = \sum_{l=1}^{k} \delta_l^W(f(u, v))w_l = \sum_{l=1}^{k}(\delta_l^W \circ f)(u, v)w_l =$$
$$= \sum_{l=1}^{k}(\sum_{i,j=1}^{m,n} \delta_l^W(f(u_i, v_j))\delta_{i,j}^{U\times V})(u, v)w_l = \sum_{l,i,j=1}^{k,m,n} \delta_l^W(f(u_i, v_j))(\delta_{i,j}^{U\times V}(u, v)w_l).$$

Jeżeli teraz oznaczymy symbolem $\delta_{i,j,l}$ funkcję z $Bil(U, V, W)$ zdefiniowaną wzorem

$$\delta_{i,j,l}(u, v) = \delta_{i,j}^{U\times V}(u, v)w_l = \delta_i^U(u)\delta_j^V(v)w_l, \tag{6}$$

to otrzymamy

$$f(u,v)=\sum_{l,i,j=1}^{k,m,n}\delta_l^W(f(u_i,v_j))\delta_{i,j,l}(u,v).$$

Tak więc

$$f=\sum_{l,i,j=1}^{k,m,n}\delta_l^W(f(u_i,v_j))\delta_{i,j,l}, \tag{7}$$

czyli przekształcenia $\delta_{i,j,l}$ generują $Bil(U,V,W)$.

Z drugiej strony, jeżeli

$$\sum_{l,i,j=1}^{k,m,n}a_{i,j,l}\delta_{i,j,l}=0$$

(jest funkcją stale równą 0), to

$$\sum_{l,i,j=1}^{k,m,n}a_{i,j,l}\delta_{i,j,l}(u,v)=\sum_{l=1}^{k}\sum_{i,j=1}^{m,n}a_{i,j,l}\delta_{i,j}^{U\times V}(u,v)w_l=0.$$

Z liniowej niezależności wektorów w_l otrzymujemy, że dla $l=1,\dots,k$ funkcja

$$\sum_{i,j=1}^{m,n}a_{i,j,l}\delta_{i,j}^{U\times V}$$

jest stale równe 0. Wobec liniowej niezależności funkcjonałów $\delta_{i,j}^{U\times V}$, wszystkie współczynniki są równe 0. W ten sposób dowiedliśmy liniową niezależność przekształceń $\delta_{i,j,l}$.

3.1.10 Przestrzeń form trójliniowych

Przyjmijmy, że mamy przestrzenie U, V i W oraz ich bazy $u_1,\dots,u_m$, $v_1,\dots,v_n$ oraz $w_1,\dots,w_k$.

Przestrzeń $Bil(U,V,W)$ jest także izomorficzna z przestrzenią form trójliniowych ze zmiennymi $X_1,\dots,X_m;Y_1,\dots,Y_n;Z_1,\dots,Z_k$. Przestrzeń tę będziemy oznaczać symbolem

$$T(X_1,\dots,X_m;Y_1,\dots,Y_n;Z_1,\dots,Z_k).$$

Elementami tej przestrzeni są wyrażenia postaci

$$\sum_{i,j,l=1}^{m,n,k}a_{i,j,l}X_iY_jZ_l.$$

Wyrażenia takie dodajemy dodając współczynniki:

$$\sum_{i,j,l=1}^{m,n,k}a_{i,j,l}X_iY_jZ_l+\sum_{i,j,l=1}^{m,n,k}b_{i,j,l}X_iY_jZ_l=\sum_{i,j,l=1}^{m,n,k}(a_{i,j,l}+b_{i,j,l})X_iY_jZ_l.$$

Analogicznie definiujemy mnożenie przez element ciała k:

$$c(\sum_{i,j,l=1}^{m,n,k}a_{i,j,l}X_iY_jZ_l)=\sum_{i,j,l=1}^{m,n,k}ca_{i,j,l}X_iY_jZ_l.$$

Standardowa baza przestrzeni $T(X_1,\dots,X_m;Y_1,\dots,Y_n;Z_1,\dots,Z_k)$ składa się z form postaci $X_iY_jZ_l$.

Izomorfizm $I:Bil(U,V,W)\to T(X_1,\dots,X_m;Y_1,\dots,Y_n;Z_1,\dots,Z_k)$ definiujemy rozszerzając na całą przestrzeń $Bil(U,V,W)$ funkcję przyporządkowującą przekształceniu $\delta_{i,j,l}$ formę $X_iY_jZ_l$.

3.2 Własność jednoznacznej uniwersalnej faktoryzacji

Przypuśćmy, że mamy dane dwie przestrzenie liniowe U i V. O parze złożonej z przestrzeni W i przekształcenia dwuliniowego $t : U \times V \to W$ mówimy, że ma własność jednoznacznej uniwersalnej faktoryzacji, jeżeli dla dowolnego przekształcenia dwuliniowego $f : U \times V \to W'$ istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $\varphi : W \to W'$ takie, że $\varphi(t(u, v)) = f(u, v)$ dla wszystkich $u \in U$ i $v \in V$.

Załóżmy, że para W, t ma własność jednoznacznej uniwersalnej faktoryzacji dla przestrzeni U i V. Niech $u_1 \dots u_n$ będzie bazą przestrzeni U, a $v_1 \dots v_m$ – bazą przestrzeni V. Wtedy zachodzą następujące fakty:

Fakt 3.5 *Zbiór* $\{t(u, v) : u \in U \wedge v \in V\}$ *generuje przestrzeń* W.

Dowód. W przeciwnym razie dowolna baza przestrzeni W zawiera element w, który nie jest postaci $t(u, v)$. Dla takiego w i dla dowolnego przekształcenia dwuliniowego $f : U \times V \to W'$ wartość $\varphi(w)$ możemy określić w dowolny sposób zapewniając jednocześnie spełnianie warunku $\varphi(t(u, v)) = f(u, v)$. W tej sytuacji, funkcja φ nie jest wyznaczona jednoznacznie. □

Fakt 3.6 *Zbiór* $\{t(u_i, v_j) : i = 1, \dots n \wedge j = 1, \dots m\}$ *generuje przestrzeń* W.

Dowód. Jest to konsekwencja równości

$$t(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i, \sum_{j=1}^{m} b_j v_j) = \sum_{i,j=1}^{n,m} a_i b_j f(u_i, v_j). \ \square$$

Fakt 3.7 *Zbiór* $\{t(u_i, v_j) : i = 1, \dots n \wedge j = 1, \dots m\}$ *ma* nm *elementów i jest bazą przestrzeni* W.

Dowód. Posługując się lematem 3.4 konstruujemy przekształcenie dwuliniowe $f : U \times V \to k^{nm}$ takie, że $f(u_i, v_j) = e_{(i-1)m+j}$. Niech $\varphi : W \to k^{nm}$ będzie funkcją liniową taka, że $\varphi(t(u, v)) = f(u, v)$.

Funkcja φ jest typu „na", gdyż wśród jej wartości są wszystkie elementy bazy standardowej przestrzeni k^{nm}. Wiemy, że zbiór $\{t(u_i, v_j) : i = 1, \dots n \wedge j = 1, \dots m\}$ generuje W i ma $\leq nm$ elementów. Funkcja φ przekształca ten zbiór na bazę przestrzeni k^{nm}. Stąd wynika, że zbiór $\{t(u_i, v_j) : i = 1, \dots n \wedge j = 1, \dots m\}$ ma dokładnie nm elementów i jest bazą przestrzeni W. □

Wniosek 3.8 *Jeżeli dwie pary mają własność jednoznacznej uniwersalnej faktoryzacji (dla ustalonych przestrzeni* U *i* V*), to przestrzenie z tych par są izomorficzne i co więcej, (pewien) izomorfizm tych przestrzeni zachowuje przekształcenia dwuliniowe z tych par.*

Dowód. Przypuśćmy, że pary (W, t) i (W', t') mają własność jednoznacznej uniwersalnej faktoryzacji. Istnieje więc funkcja liniowa φ taka, że

$$\varphi(t(u, v)) = t'(u, v).$$

Z faktu 3.7 wynika, że φ przeprowadza bazę przestrzeni W na bazę przestrzeni W'. Tak więc φ jest izomorfizmem przestrzeni W i W'. Podany wzór oznacza, że φ zachowuje też przekształcenia t i t'. □

Jeżeli para (W, t) ma własność jednoznacznej uniwersalnej faktoryzacji dla przestrzeni U i V, to przestrzeń W nazywamy iloczynem tensorowym przestrzeni U, V i oznaczamy symbolem $U \otimes V$, a wartość $t(u, v)$ nazywamy iloczynem tensorowym wektorów u, v i oznaczamy symbolem $u \otimes v$.

Analogicznie, posługując się przekształceniami trójliniowymi definiujemy iloczyn tensorowy $U \otimes V \otimes W$ przestrzeni U, V i W.

Prawdziwe są też fakty w pewnym sensie odwrotne do podanych:

Fakt 3.9 *Jeżeli $t : U \times V \to W$ i $f : U \times V \to W'$ są przekształceniami dwuliniowymi i zbiór $\{t(u, v) : u \in U \wedge v \in V\}$ generuje przestrzeń W, to istnieje najwyżej jedna funkcja liniowa φ taka, że $\varphi(t(u, v)) = f(u, v)$.*

Dowód. Jest to oczywista konsekwencja faktu 3.1. □

Lemat 3.10 *Jeżeli $t : U \times V \to W$ jest przekształceniem dwuliniowym takim, że zbiór $T = \{t(u_i, v_j) : i = 1, \dots n \wedge j = 1, \dots m\}$ jest bazą przestrzeni W i ma nm elementów, to para (W, t) ma własność jednoznacznej uniwersalnej faktoryzacji.*

Dowód. Przypuśćmy, że $f : U \times V \to W$ jest przekształceniem dwuliniowym. Weźmy funkcję liniową $\varphi : W \to W'$ spełniającą równości $\varphi(t(u_i, v_j)) = f(u_i, v_j)$ dla $i = 1, \dots, n$ i $j = 1, \dots, m$. Z założenia o T wynika, że funkcja φ jest poprawnie zdefiniowana na zbiorze T. Istnienie funkcji φ wynika z lematu 3.2. Na podstawie faktu 3.3 stwierdzamy, że $\varphi(t(u, v)) = f(u, v)$ dla wszystkich $u \in U$ i $v \in V$. Jedyność φ wynika z faktu 3.9. □

Lemat 3.10 pozwala bez trudu konstruować iloczyny tensorowe. Prawdziwa jest też wersja tego lematu dla trzech przestrzeni i przekształceń trójliniowych.

3.2.1 Przykłady iloczynów tensorowych

Przykład 3.11 Przypuśćmy, że mamy dwie przestrzenie U i V. Zdefiniujemy iloczyn tensorowy przestrzeni U^* i V^*. Przyjmijmy, że

$$U^* \otimes V^* = Bil(U, V, k)$$

oraz dla $f \in U^*$ i $g \in V^*$ przyjmijmy, że $f \otimes g$ jest funkcjonałem dwuliniowym zdefiniowanym wzorem

$$(f \otimes g)(u, v) = f(u)g(v).$$

Zgodnie z wzorem (4), zdefiniowane przekształcenie $\otimes$ przeprowadza bazy przestrzeni funkcjonałów liniowych opisane w rozdziale 3.1.5 na bazę przestrzeni $Bil(U, V, k)$ (patrz rozdział 3.1.8). Z lematu 3.10 wynika, że zdefiniowana para ma własność jednoznacznej uniwersalnej faktoryzacji.

Przykład 3.12 Jeżeli mamy trzy przestrzenie U, V i W, to możemy zdefiniować iloczyn tensorowy przestrzeni U^*, V^* i W przyjmując, że

$$U^* \otimes V^* \otimes W = Bil(U, V, W)$$

oraz definiując dla $f \in U^*$, $g \in V^*$ i $w \in W$ iloczyn tensorowy $f \otimes g \otimes w$ jako przekształcenie dwuliniowe spełniające równość

$$(f \otimes g \otimes w)(u, v) = f(u)g(v)w. \tag{8}$$

Aby w tym przypadku dowieść własność jednoznacznej uniwersalnej faktoryzacji, postępujemy tak, jak w poprzednim przykładzie korzystając z lematu 3.10, wzoru (6) oraz wyników zawartych w rozdziałach 3.1.5 i 3.1.9.

3.2.2 Mnożenie macierzy według Kroneckera

Przypuśćmy, że mamy dwie macierze: macierz $A \in k^{m\times n}$ o wyrazach $a_{i,j}$, oraz macierz $B \in k^{m'\times n'}$ o wyrazach $b_{i,j}$. Zdefiniujemy iloczyn Kroneckera macierzy A i B. Jest nim macierz $A \otimes B \in k^{mm'\times nn'}$ o wyrazach $c_{i,j}$ zdefiniowanych wzorem

$$c_{i,j} = a_{(i \text{ div } m')+1,(j \text{ div } n')+1} b_{(i \bmod m')+1,(j \bmod n')+1}.$$

Posługując się oznaczeniami wprowadzonymi w rozdziale 3.1.1, macierz o wyrazach $c_{i,j}$ przedstawiamy jako kombinację liniową

$$\sum_{i,j=1}^{mm',nn'} c_{i,j} E_{i,j}^{mm'\times nn'}.$$

Tak więc

$$\begin{aligned} A \otimes B &= (\textstyle\sum_{i,j=1}^{m,n} a_i E_{i,j}^{m\times n}) \otimes (\textstyle\sum_{i,j=1}^{m',n'} b_i E_{i,j}^{m'\times n'}) = \\ &= \sum_{i,j=1}^{mm',nn'} a_{(i \text{ div } m')+1,(j \text{ div } n')+1} b_{(i \bmod m')+1,(j \bmod n')+1} E_{i,j}^{mm'\times nn'}. \end{aligned}$$

Z tego wzoru wynika, że współrzędne w bazie $E_{i,j}^{mm'\times nn'}$ iloczynu $A \otimes B$ są formami dwuliniowymi współrzędnych macierzy A i B w bazach $E_{i,j}^{m\times n}$ i $E_{i,j}^{m'\times n'}$ odpowiednio. Stąd otrzymujemy, że iloczyn Kroneckera jest przekształceniem dwuliniowym.

Iloczyn Kroneckera $A \otimes B$ można też zdefiniować inaczej: jest to macierz, którą można podzielić na mn podmacierzy będących iloczynami $a_{i,j}$ i macierzy B zgodnie ze wzorem

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \dots & a_{1,n}B \\ & \ddots & \\ a_{m,1}B & \dots & a_{m,n}B \end{pmatrix}.$$

Zauważmy jeszcze, że zachodzi wzór

$$E_{i,j}^{m\times n} \otimes E_{k,l}^{m'\times n'} = E_{(i-1)m'+k,(j-1)n'+l}^{mm'\times nn'}. \tag{9}$$

Przykład 3.13 Para złożona z przestrzeni $k^{m\times n} \otimes k^{m'\times n'} = k^{mm'\times nn'}$ i iloczynu Kroneckera ma własność jednoznacznej uniwersalnej faktoryzacji. Wynika to bez trudu z powyższego wzoru i lematu 3.10.

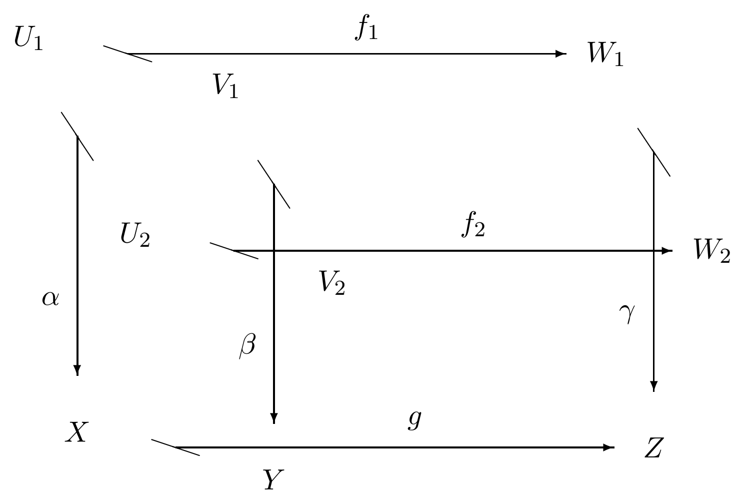
3.2.3 Iloczyn tensorowy przekształceń dwuliniowych

Rysunek 2 przedstawia tzw. diagram, czyli układ funkcji, w tym przypadku sześciu funkcji dwóch zmiennych: $f_1 : U_1 \times V_1 \to W_1$, $f_2 : U_2 \times V_2 \to W_2$ $g : X \times Y \to Z$, $\alpha : U_1 \times U_2 \to X$, $\beta : V_1 \times V_2 \to Y$ oraz $\gamma : W_1 \times W_2 \to Z$.

Diagram przedstawiony na rysunku 2 jest przemienny, jeżeli

$$g(\alpha(u_1, u_2), \beta(v_1, v_2)) = \gamma(f_1(u_1, v_1), f_2(u_2, v_2)) \tag{10}$$

dla wszystkich możliwych argumentów u_1, u_2, v_1, v_2. Dalej będziemy zakładać, że funkcje z rysunku 2 są dwuliniowe.



Rysunek 2: Diagram definiujący iloczyn tensorowy przekształceń

Wzór (10) nie zawsze i nie dla wszystkich argumentów definiuje przekształcenie g. Jeżeli α i β są iloczynami tensorowymi, to wzór (10) definiuje w jawny sposób funkcję g na wektorach bazowych. Zgodnie z lematem 3.4 możemy rozszerzyć tę definicję na przestrzenie X i Y. Jeżeli γ jest funkcją dwuliniową, to dla tak zdefiniowanej funkcji g będzie spełniony wzór (10) i diagram z rysunku 2 będzie przemienny. Co więcej, w tym przypadku istnieje najwyżej jedna taka funkcja g.

Przypuśćmy, że mamy dane $f_1 \in Bil(U_1, V_1, W_1)$ i $f_2 \in Bil(U_2, V_2, W_2)$. Iloczynem tensorowym przekształceń f_1 i f_2 nazywamy przekształcenie dwuliniowe $g \in Bil(U_1 \otimes U_2, V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2)$ spełniające dla wszystkich $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$, $v_1 \in V_1$ i $v_2 \in V_2$ równości

$$g(u_1 \otimes u_2, v_1 \otimes v_2) = f_1(u_1, v_1) \otimes f_2(u_2, v_2). \tag{11}$$

Z powyższych rozważań $X = U_1 \otimes U_2$, $Y = V_1 \otimes V_2$ i $Z = W_1 \otimes W_2$ wynika, że takie przekształcenie g istnieje i jest tylko jedno. Nazywamy je iloczynem tensorowym przekształceń f_1 i f_2 i oznaczamy symbolem $f_1 \otimes f_2$.

3.3 Iloczyn kartezjański (suma prosta) dwóch przestrzeni liniowych

Przypuśćmy, że mamy przestrzenie liniowe U i V nad ciałem k. W iloczynie kartezjańskim $U \times V$ definiujemy dodawanie i mnożenie przez elementy ciała k przyjmując, że

$$(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2) \;\text{ oraz }\; c \cdot (u, v) = (c \cdot u, c \cdot v).$$

Iloczyn $U \times V$ z tak zdefiniowanymi działaniami jest przestrzenią liniową.

Przyjmijmy, że w przestrzeniach U i V odpowiednio mamy dane bazy $u_1, \ldots, u_n$ i $v_1, \ldots, v_m$. Wtedy pary $(u_1, 0), \ldots, (u_n, 0)$ i $(0, v_1), \ldots, (0, v_m)$ tworzą bazę przestrzeni $U \times V$. Jeżeli w przestrzeniach U i V wybraliśmy bazy standardowe, to podany układ par będziemy nazywać bazą standardową iloczynu $U \times V$.

W algebrze często pojęcie iloczynu kartezjańskiego zastępuje się pojęciem sumy prostej. Jeżeli mamy przestrzeń liniową W i dwie jej podprzestrzenie U i V, to W nazywamy sumą prostą U i V, jeżeli każdy element W daje się jednoznacznie przedstawić w postaci sumy elementu przestrzeni U i elementu przestrzeni V. Nietrudno zauważyć, że $U \times V$ jest sumą prostą podprzestrzeni $\{(u,0) : u \in U\}$ (izomorficznej z U) i podprzestrzeni $\{(0,v) : v \in V\}$ (izomorficznej z V).

3.4 Suma prosta przekształceń dwuliniowych

Jeżeli mamy przekształcenia dwuliniowe $f_1 : U_1 \times V_1 \to W_1$ i $f_2 : U_2 \times V_2 \to W_2$, to możemy zdefiniować przekształcenie $f_1 \oplus f_2 : (U_1 \times U_2) \times (V_1 \times V_2) \to (W_1 \times W_2)$ (funkcję dwóch zmiennych, pierwsza przebiega przestrzeń liniową $U_1 \times U_2$, druga – $V_1 \times V_2$) przyjmując, że

$$(f_1 \oplus f_2)((u_1,u_2),(v_1,v_2)) = (f_1(u_1,v_1), f_2(u_2,v_2)).$$

Korzystając z definicji dodawania w przestrzeni $W_1 \times W_2$, definicję sumy prostej można zapisać w postaci

$$(f_1 \oplus f_2)((u_1,u_2),(v_1,v_2)) = (f_1(u_1,v_1),0) + (0, f_2(u_2,v_2)).$$

Sumę prostą można też definiować w przypadku, gdy $W_1 = W_2$ przyjmując, że

$$(f_1 \oplus f_2)((u_1,u_2),(v_1,v_2)) = f_1(u_1,v_1) + f_2(u_2,v_2).$$

Oczywiście, suma prosta przekształceń dwuliniowych jest przekształceniem dwuliniowym.