4 Własności mnożenia macierzy

4.1 Mnożenie macierzy jako przekształcenie dwuliniowe

Przyjmijmy, że $\langle m, n, k\rangle$ oznacza mnożenie macierzy o m wierszach długości m przez macierz o n wierszach długości k. Tak więc

$$\langle m, n, k\rangle : k^{m\times n} \times k^{n\times k} \to k^{m\times k}.$$

Wiadomo, że $\langle m, n, k\rangle$ jest przekształceniem dwuliniowym, a więc

$$\langle m, n, k\rangle \in Bil(k^{m\times n}, k^{n\times k}, k^{m\times k}).$$

Oprócz iloczynu macierzy będziemy rozważać iloczyn transponowany $\langle m, n, k\rangle^T$ (funkcję, która macierzom A i B przyporządkowuje macierz $(AB)^T$). Oczywiście,

$$\langle m, n, k\rangle^T \in Bil(k^{m\times n}, k^{n\times k}, k^{m\times k}).$$

Obliczanie iloczynu i iloczynu transponowanego jest równie trudne. Trzeba policzyć to samo, następnie wyniki obliczeń inaczej rozmieścić w macierzy. Równie łatwo z formalnej definicji można wyprowadzić, że $L(\langle m, n, k\rangle) = L(\langle m, n, k\rangle^T)$. Iloczyn transponowany ma trochę bardziej regularne własności w porównaniu z zwykłym iloczynem.

4.2 Mnożenie macierzy jako kombinacja wektorów bazowych

W rozdziale 3.1.9 przedstawiliśmy dowolne przekształcenie dwuliniowe w postaci kombinacji liniowej przekształceń z pewnej standardowej bazy. Spróbujemy teraz w tej bazie przedstawić przekształcenia $\langle m, n, k\rangle$ oraz $\langle m, n, k\rangle^T$. Wymaga to skomplikowania oznaczeń. Do tej pory analizując $Bil(U, V, W)$ bazy przestrzeni U, V i W indeksowaliśmy jednym indeksem. Teraz naturalne będzie indeksowanie baz odpowiednich przestrzeni macierzy za pomocą dwóch indeksów.

Odpowiednikiem funkcjonału δ_i zdefiniowanego wzorem (1) będzie teraz $\Delta^{m,n}_{i,j} : k^{m\times n} \to k$ zdefiniowany wzorem

$$\Delta^{m,n}_{i,j}(E^{m\times n}_{i',qj'}) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } i = i' \text{ i } j = j' \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases} \tag{12}$$

Rolę funkcjonału $\delta_{i,j}$ z wzoru (3) będzie odgrywać funkcjonał $\Delta^{m,n,k}_{i,j,p,q} : k^{m\times n} \times k^{n\times m} \to k$ zdefiniowany wzorem

$$\Delta^{m,n,k}_{i,j,p,q}(E^{m\times n}_{i',j'}, E^{n\times k}_{p',q'}) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } i = i', j = j', p = p' \text{ oraz } q = q' \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases} \tag{13}$$

Standardowa baza przestrzeni $Bil(k^{m\times n}, k^{n\times k}, k^{m\times k})$ będzie składać się z przekształceń $\Delta^{m,n,k}_{i,j,p,q,s,t} : k^{m\times n} \times k^{n\times m} \to k^{m\times k}$ takich, że

$$\Delta^{m,n,k}_{i,j,p,q,s,t}(A, B) = \Delta^{m,n}_{i,j}(A)\Delta^{n,k}_{p,q}(B)E^{m\times k}_{s,t} \tag{14}$$

definiowanych wzorami analogicznymi do wzorów (6).

Podstawiając wprowadzone oznaczenia do wzoru (7) otrzymujemy

$$\langle m, n, k\rangle = \sum_{i,j,p,q,s,t=1}^{m,n,n,k,k,m} \Delta^{k,m}_{s,t}(\langle m, n, k\rangle(E^{m\times n}_{i,j}, E^{n\times k}_{p,q}))\Delta^{m,n,k}_{i,j,p,q,s,t} = \sum_{i,j,q=1}^{m,n,k} \Delta^{m,n,k}_{i,j,j,q,i,q}. \tag{15}$$

Analogiczne przedstawienie $\langle m,n,k\rangle^T$ ma postać

$$\langle m,n,k\rangle^T = \sum_{i,j,q=1}^{m,n,k} \Delta^{m,n,k}_{i,j,j,q,q,i}.$$

Z rozdziału 3.1.10 wynika, że przstrzeń $Bil(k^{m\times n}, k^{n\times k}, k^{m\times k})$ jest izomorficzna z przestrzenią

$$T(X_{1,1},\ldots,X_{m,n};Y_{1,1},\ldots,Y_{n,k};Z_{1,1},\ldots,Z_{m,k})$$

(ze zmiennymi indeksowanymi dwoma indeksami). Naturalny izomorfizm opisany w tym rozdziale przeprowadza przekształcenie $\langle m,n,k\rangle$ na formę

$$\sum_{i,j,q=1}^{m,n,k} X_{i,j}Y_{j,q}Z_{i,q},$$

a przekształcenie $\langle m,n,k\rangle^T$ – na formę

$$\sum_{i,j,q=1}^{m,n,k} X_{i,j}Y_{j,q}Z_{q,i}.$$

4.3 Iloczyn tensorowy iloczynów macierzy

Będziemy rozważać teraz dwie funkcje

$$f_1, f_2 : k^{m\times n} \times k^{m'\times n'} \times k^{n\times k} \times k^{n'\times k'} \to k^{mm'\times kk'}$$

zdefiniowane wzorami

$$f_1(A,B,C,D) = (A\otimes B)(C\otimes D) \text{ oraz } f_2(A,B,C,D) = (AC)\otimes(BD),$$

gdzie $\otimes$ oznacza iloczyn Kroneckera. Pokażemy, że $f_1(A,B,C,D) = f_2(A,B,C,D)$. Obie funkcje są czteroliniowe. Na podstawie lematu analogicznego do 3.4 dowodzoną równość wystarczy pokazać dla wektorów bazowych, a więc wystarczy dowieść, że

$$f_1(E^{m\times n}_{i,j}, E^{m'\times n'}_{i',j'}, E^{n\times k}_{p,q}, E^{n'\times k'}_{p',q'}) = f_2(E^{m\times n}_{i,j}, E^{m'\times n'}_{i',j'}, E^{n\times k}_{p,q}, E^{n'\times k'}_{p',q'}). \tag{16}$$

Aby to dowieść, ustalmy wzory pozwalające mnożyć interesujące nas macierze. Tak więc,

$$E^{m\times n}_{i,j}E^{n\times k}_{p,q} = \begin{cases} E^{m\times k}_{i,q} & \text{jeżeli } j=p \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases} \tag{17}$$

Mamy także

$$E^{m\times n}_{i,j}\otimes E^{m'\times n'}_{i',j'} = E^{mm'\times nn'}_{(i-1)m'+i',(j-1)n'+j'} \tag{18}$$

(patrz wzór (9)).

Przypadek 1: $j\neq p$. W tym przypadku, zgodnie z wzorem (17), iloczyn

$$E^{m\times n}_{i,j}E^{n,k}_{p\times q} = 0$$

i prawa strona wzoru (16) jest równa 0. Wystarczy więc wyliczyć lewą stronę wzoru (16).

$$
\begin{aligned}
&f_1(E_{i,j}^{m\times n}, E_{i',j'}^{m'\times n'}, E_{p,q}^{n\times k}, E_{p',q'}^{n'\times k'}) = (E_{i,j}^{m\times n}\otimes E_{i',j'}^{m'\times n'})(E_{p,q}^{n\times k}\otimes E_{p',q'}^{n'\times k'}) = \\
&= E_{(i-1)m'+i',(j-1)n'+j'}^{mm'\times nn'} E_{(p-1)n'+p',(q-1)k'+q'}^{nn'\times kk'}.
\end{aligned} \tag{19}
$$

Zauważmy, że w tym przypadku $(j-1)n'+j' \neq (p-1)n'+p'$, ponieważ $j', p' = 1, \ldots, n'$, różnica między j' i p' jest mniejsza niż n', a różnica między $(j-1)n'$ i $(p-1)n'$ jest przynajmniej równa n'. Wobec tego, na podstawie wzoru (17), lewa strona wzoru (16) też jest równa 0.

Przypadek 2: $j = p$ oraz $j' \neq p'$. W tym przypadku prawa strona wzoru (16) jest równa 0 z tych samych powodów, co w przypadku poprzednim. Dokładnie tak samo obliczamy lewą stronę tego wzoru. Jest ona równa 0, gdyż $(j-1)n'+j' \neq (p-1)n'+p'$. To, że te dwie liczby są różne, jest oczywiste w rozważanym przypadku.

Przypadek 3: $j = p$ oraz $j' = p'$. Zgodnie z wzorami (19) i (17), prawa strona wzoru (16) jest teraz równa

$$
\begin{aligned}
&E_{(i-1)m'+i',(j-1)n'+j'}^{mm'\times nn'} E_{(p-1)n'+p',(q-1)k'+q'}^{nn'\times kk'} = E_{(i-1)m'+i',(j-1)n'+j'}^{mm'\times nn'} E_{(j-1)n'+j',(q-1)k'+q'}^{nn'\times kk'} = \\
&= E_{(i-1)m'+i',(q-1)k'+q'}^{mm'\times kk'}.
\end{aligned}
$$

Teraz obliczymy lewą stroną tego wzoru korzystając kolejno z wzorów (18) i (17)

$$
\begin{aligned}
&f_1(E_{i,j}^{m\times n}, E_{i',j'}^{m'\times n'}, E_{p,q}^{n\times k}, E_{p',q'}^{n'\times k'}) = f_1(E_{i,j}^{m\times n}, E_{i',j'}^{m'\times n'}, E_{j,q}^{n\times k}, E_{j',q'}^{n'\times k'}) = \\
&= E_{(i-1)m'+i',(j-1)n'+j'}^{mm'\times nn'} E_{(j-1)n'+j',(q-1)k'+q'}^{nn'\times kk'} = E_{(i-1)m'+i',(q-1)k'+q'}^{mm'\times kk'}.
\end{aligned}
$$

Udowodniliśmy więc dla iloczynu Kroneckera równość

$$
(A\otimes B)(C\otimes D) = (AC)\otimes(BD). \tag{20}
$$

równość ta pozwala obliczyć iloczyn Kroneckera przekształceń $\langle m,n,k\rangle$ i $\langle m',n',k'\rangle$.

$$
\begin{aligned}
&(\langle m,n,k\rangle \otimes \langle m',n',k'\rangle)(A\otimes B, C\otimes D) = \langle m,n,k\rangle(A,C)\otimes\langle m',n',k'\rangle(B,D) = \\
&= (AC)\otimes(BD) = (A\otimes B)(C\otimes D) = \langle mm',nn',kk'\rangle(A\otimes B, C\otimes D).
\end{aligned}
$$

Ponieważ iloczyn Kroneckera przekształceń jest dobrze scharakteryzowany przez powyższą równość jako przekształcenie dwuliniowe, więc

$$
\langle m,n,k\rangle \otimes \langle m',n',k'\rangle = \langle mm',nn',kk'\rangle. \tag{21}
$$

4.4 Iloczyny $\langle m,n,k\rangle$ i $\langle k,m,n\rangle$

Będziemy teraz rozważać układ przestrzeni i przekształceń przedstawiony na rysunku 3.

Przestrzenie $k^{m\times n}$, $k^{n\times k}$ oraz $k^{m\times k}$ są przestrzeniami macierzy. W każdej z nich mamy zdefiniowaną standardową bazę: w przestrzeni $k^{m\times n}$ tę bazę tworzą macierze $E_{i,j}^{m\times n}$. Symbolem id zostały oznaczone funkcje identycznościowe. Funkcje oznaczone literą T przyporządkowują macierzy A macierz transponowaną A^T.

$$
\begin{tikzcd}
k^{m\times n}\times \arrow[d, "I^{-1}_{m\times n}"] \arrow[rrrr, bend right, "id"'] & k^{n\times k}\times \arrow[d, "I^{-1}_{n\times k}"] \arrow[rrrr, bend left, "T"] & k^{m\times k} \arrow[d, "id"] \arrow[r, "T"] & k^{k\times m}\times \arrow[d, "I^{-1}_{k\times m}"] & k^{m\times n}\times \arrow[d, "I^{-1}_{m\times n}"] & k^{k\times n} \arrow[d, "id"] \\
(k^{m\times n})^*\times & (k^{n\times k})^*\times \arrow[d, "\otimes"] & k^{m\times k} & (k^{k\times m})^*\times & (k^{m\times n})^*\times \arrow[d, "\otimes"] & k^{k\times n} \\
& Bil(k^{m\times n},k^{n\times k},k^{m\times k}) \arrow[rrr, "\Phi"] & & & Bil(k^{k\times m},k^{m\times n},k^{k\times n}) &
\end{tikzcd}
$$

Rysunek 3: Funkcja przekształcająca $\langle m,n,k\rangle$ na $\langle k,m,n\rangle$

Przestrzenie $(k^{m\times n})^*$ i $(k^{n\times k})^*$ są przestrzeniami funkcjonałów zdefiniowanymi w rozdziale 3.1.5. Przestrzenie te są izomorficzne z odpowiednimi przestrzeniami macierzy. Standardowy izomorfizm $I_{m,n} : (k^{m\times n})^* \to k^{m\times n}$ jest definiujemy tak, jak I we wspomnianym rozdziale. W szczególności, zgodnie z oznaczeniami wprowadzonymi w rozdziale 4.2, mamy

$$I^{-1}_{m,n}(E^{m\times n}_{i,j}) = \Delta^{m,n}_{i,j}.$$

Funkcjonały $\Delta^{m,n}_{i,j}$ tworzą bazę standardową przestrzeni $(k^{m\times n})^*$. Podobnie,

$$I^{-1}_{n,k}(E^{n\times k}_{p,q}) = \Delta^{n,k}_{p,q}.$$

W przykładzie 3.12 na produkcie $(k^{m\times n})^* \times (k^{n\times k})^* \times k^{m\times k}$ został zdefiniowany iloczyn tensorowy $\otimes$ przyjmujący wartości w $Bil(k^{m\times n}, k^{n\times k}, k^{m\times k})$. Iloczyn ten jest definiowany równością

$$(f \otimes g \otimes C)(A,B) = f(A)\cdot g(B)\cdot C$$

(zgodnie ze wzorem (8)). W szczególności mamy

$$(\Delta^{m,n}_{i,j} \otimes \Delta^{n,k}_{p,q} \otimes E^{m,k}_{s,t})(A,B) = \Delta^{m,n}_{i,j}(A)\Delta^{n\times k}_{p,q}(B)E^{m\times k}_{s,t} = \Delta^{m,n,k}_{i,j,p,q,s,t}(A,B)$$

(patrz wzór (14)). Przekształcenia dwuliniowe $\Delta^{m,n,k}_{i,j,p,q,s,t}$ tworzą bazę przestrzeni $Bil(k^{m\times n}, k^{n\times k}, k^{m\times k})$ (standardową).

Przyjmijmy, że funkcja

$$T_1 : k^{m\times n} \times k^{n\times k} \times k^{m\times k} \to Bil(k^{m\times n}, k^{n\times k}, k^{m\times k})$$

jest zdefiniowana wzorem

$$T_1(A,B,C) = I^{-1}_{m,n}(A) \otimes I^{-1}_{n,k}(B) \otimes C. \tag{22}$$

Prosty rachunek dowodzi, że

$$T_1(E^{m\times n}_{i,j}, E^{n\times k}_{p,q}, E^{m\times k}_{s,t}) = \Delta^{m,n,k}_{i,j,p,q,s,t}. \tag{23}$$

Posługując się lematem 3.10 łatwo sprawdzić, że funkcja T_1 ma własność jednostajnej uniwersalnej faktoryzacji (też jest iloczynem tensorowym).

Podobne fakty zachodzą oczywiście dla przestrzeni $k^{k\times m}$, $k^{m\times n}$ i $k^{k\times n}$.

Zdefiniujmy teraz (nieco bardziej skomplikowaną!) funkcję

$$T_2 : k^{m\times n} \times k^{n\times k} \times k^{m\times k} \to Bil(k^{k\times m}, k^{m\times n}, k^{k\times n})$$

przyjmując, że

$$T_2(A, B, C) = I^{-1}_{k,m}(C^T) \otimes I^{-1}_{m,n}(A) \otimes B^T.$$

Oczywiście,

$$\begin{aligned} &T_2(E^{m\times n}_{i,j}, E^{n\times k}_{p,q}, E^{m\times k}_{s,t}) = I^{-1}_{k,m}((E^{m\times k}_{s,t})^T) \otimes I^{-1}_{m,n}(E^{m\times n}_{i,j}) \otimes (E^{k\times n}_{p,q})^T = \\ &= I^{-1}_{k,m}(E^{k\times m}_{t,s}) \otimes I^{-1}_{m,n}(E^{m\times n}_{i,j}) \otimes E^{n\times k}_{q,p} = \Delta^{k,m}_{t,s} \otimes \Delta^{m,n}_{i,j} \otimes E^{n\times k}_{q,p} = \Delta^{k,m,n}_{t,s,i,j,q,p}. \end{aligned} \tag{24}$$

Stąd łatwo wynika własność jednostajnej uniwersalnej faktoryzacji funkcji T_2.

Ponieważ T_1 i T_2 są określone na tej samej przestrzeni i mają własność jednostajnej uniwersalnej faktoryzacji, więc – zgodnie z wnioskiem 3.8 – istnieje izomorfizm

$$\Phi : Bil(k^{m\times n}, k^{n\times k}, k^{m\times k}) \to Bil(k^{k\times m}, k^{m\times n}, k^{k\times n})$$

taki, że

$$\Phi(T_1(A, B, C)) = T_2(A, B, C). \tag{25}$$

Stąd i z wzorów (23) i (24) otrzymujemy, że

$$\Phi(\Delta^{m,n,k}_{i,j,p,q,s,t}) = \Phi(T_1(E^{m\times n}_{i,j}, E^{n\times k}_{p,q}, E^{m\times k}_{s,t})) = T_2(E^{m\times n}_{i,j}, E^{n\times k}_{p,q}, E^{m\times k}_{s,t}) = \Delta^{k,m,n}_{t,s,i,j,q,p}. \tag{26}$$

Jednym z argumentów Φ jest iloczyn $\langle m, n, k\rangle$. Zgodnie z wzorem 15 iloczyn $\langle m, n, k\rangle$ ma w bazie standardowej przestrzeni $Bil(k^{m\times n}, k^{n\times k}, k^{m\times k})$ przedstawienie

$$\langle m, n, k\rangle = \sum_{i,j,q}^{m,n,k} \Delta^{m,n,k}_{i,j,j,q,i,q}.$$

Analogiczny wzór zachodzi także dla iloczynu $\langle k, m, n\rangle$. Przedstawienia iloczynów i wzór (26) pociągają za sobą, że

$$\begin{aligned} &\Phi(\langle m, n, k\rangle) = \Phi(\sum_{i,j,q}^{m,n,k} \Delta^{m,n,k}_{i,j,j,q,i,q}) = \sum_{i,j,q}^{m,n,k} \Phi(\Delta^{m,n,k}_{i,j,j,q,i,q}) = \sum_{i,j,q}^{m,n,k} \Delta^{k,m,n}_{q,i,i,j,q,j} = \\ &= \sum_{q,i,j}^{k,m,n} \Delta^{k,m,n}_{q,i,i,j,q,j} = \langle k, m, n\rangle. \end{aligned}$$