14 Dodatek o wyznaczniku Grama

14.1 Uogólnione rozwinięcie Laplace'a

Przypuśćmy, że mamy macierz A. Dla rosnących ciągów $\vec{x}$ oraz $\vec{y}$ liczb większych od 0 i nie przekraczających odpowiednio liczby wierszy i liczby kolumn macierzy A definiujemy macierze $A_{\vec{x};\vec{y}}$ oraz $A^{\vec{x};\vec{y}}$. Pierwsza z tych macierzy powstaje z macierzy A przez wykreślenie wierszy o indeksach z ciągu $\vec{x}$ oraz kolumn o indeksach z ciągu $\vec{y}$. Macierz $A^{\vec{x};\vec{y}}$ składa się z tych wyrazów A, które znajdują się na przecięciach wierszy o indeksach z ciągu $\vec{x}$ oraz kolumn o indeksach z ciągu $\vec{x}$.

Niech $\vec{x}$ będzie dowolnym rosnącym ciągiem liczb od 1 do n mającym $m < n$ wyrazów. Wyznacznik macierzy A o wymiarach $n \times n$ możemy obliczać zgodnie z następującym wzorem

$$| A | = \sum_{\vec{y}=(y_1,\ldots,y_m)} (-1)^{s(\vec{x})+s(\vec{y})} | A^{\vec{x};\vec{y}} || A_{\vec{x};\vec{y}} |,$$

gdzie $s(\vec{k})$ oznacza sumę wyrazów ciągu $\vec{k}$ i sumujemy w tym wzorze po wszystkich rosnących ciągach $\vec{y}$ długości m. Wzór ten nazywamy uogólnionym rozwinięciem Laplace'a wyznacznika macierzy A.

14.2 Pewien wzór i wyznaczniki Grama

Przypuśćmy, że mamy dane wektory $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in R^m$ oraz $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n \in R^m$. Załóżmy, że $n \leq m$. Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$G_n(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n; \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n) = \begin{bmatrix} \vec{a}_1\vec{b}_1 & \ldots & \vec{a}_1\vec{b}_n \\ & \ddots & \\ \vec{a}_n\vec{b}_1 & \ldots & \vec{a}_n\vec{b}_n \end{bmatrix}$$

oraz

$$W_{(j_1,\ldots,j_k)}(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = \begin{bmatrix} a_{1,j_1} & a_{1,j_2} & \ldots & a_{1,j_k} \\ a_{2,j_1} & a_{2,j_2} & \ldots & a_{2,j_k} \\ & & \ddots & \\ a_{n,j_1} & a_{n,j_2} & \ldots & a_{n,j_k} \end{bmatrix},$$

gdzie $(j_1, \ldots, j_k)$ jest dowolnym ciągiem liczb od 1 do m oraz $\vec{a}_i = (a_{i,1}, \ldots, a_{i,m})$ dla $i = 1, \ldots, n$.

Lemat 14.1 *Dla dowolnych wektorów $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in R^m$ oraz $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n \in R^m$ mamy*

$$|G_n(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n; \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)| = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_n \leq m} \left| W_{(j_1,\ldots,j_n)}(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \right| \left| W_{(j_1,\ldots,j_n)}(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n) \right|.$$

Dowód. Lemat dowodzimy przez indukcję ze względu na n. Dla $n = 1$ wzór jest oczywisty.

Przyjmijmy, że w dalszym ciągu dowodu symbol $\vec{j}$ będzie zawsze oznaczać rosnący ciąg o $n-1$ wyrazach będących liczbami dodatnimi, mniejszymi od m. Dla takiego ciągu $\vec{j}$ symbolem $(k, \vec{j})$ oznaczamy ciąg $\vec{j}$ z liczbą k dopisaną na początku, symbolem $c(k, \vec{j})$ – ciąg $\vec{j}$ z liczbą k wstawioną tak, aby był to ciąg rosnący (o ile jest to możliwe), a symbolem $m(k, \vec{j})$ – liczbę wyrazów ciągu $\vec{j}$ mniejszych od k. Zauważmy, że zachodzą następujące równości:

$$
\begin{aligned}
&| \, G_n(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n;\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_n) \, | \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}(\vec{a}_1\vec{b}_i)| \, G_{n-1}(\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n;\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_{i-1},\vec{b}_{i+1},\ldots,\vec{b}_n) \, | \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}(\sum_{k=1}^{m} a_{1,k}b_{i,k})\sum_{\vec{j}}\left|W_{\vec{j}}(\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n)\right|\left|W_{\vec{j}}(\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_{i-1},\vec{b}_{i+1},\ldots,\vec{b}_n)\right| \\
&= \sum_{k=1}^{m}\sum_{\vec{j}} a_{1,k}\left|W_{\vec{j}}(\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n)\right|\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}b_{i,k}\left|W_{\vec{j}}(\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_{i-1},\vec{b}_{i+1},\ldots,\vec{b}_n)\right|\right) \\
&= \sum_{k=1}^{m}\sum_{\vec{j}} a_{1,k}\left|W_{\vec{j}}(\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n)\right|\left|W_{(k,\vec{j})}(\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_n)\right| \\
&= \sum_{\vec{j}}\sum_{k\notin\vec{j}} a_{1,k}\left|W_{\vec{j}}(\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n)\right|\left|W_{(k,\vec{j})}(\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_n)\right| \\
&= \sum_{\vec{j}}\sum_{k\notin\vec{j}}(-1)^{m(k,\vec{j})} a_{1,k}\left|W_{\vec{j}}(\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n)\right|\left|W_{c(k,\vec{j})}(\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_n)\right|.
\end{aligned}
$$

Wyznacznik $| \, G_n(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n;\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_n) \, |$ został więc przedstawiony w postaci sumy składników indeksowanych parami złożonymi z ciągu $\vec{j}$ i liczby k, $1 \le k \le m$, która w tym ciągu nie występuje. Nietrudno zauważyć, że funkcja F, która takiej parze przyporządkowuje parę złożoną z liczby k i ciągu $c(k,\vec{k})$ jest różnowartościowa i przekształca zbiór opisanych par na zbiór par złożonych z rosnącego, n-wyrazowego ciągu $\vec{J}$ liczb od 1 do m i jednego z wyrazów tego ciągu. Dalej, konsekwentnie, symbolem $\vec{J}$ będą oznaczane takie właśnie ciągi. Z istnienia i własności funkcji F wynika zaś, że zbiór jej wartości jest zbiorem, który może indeksować składniki podanego przedstawienia interesującego nas wyznacznika. Aby indeksować tę sumę zbiorem wartości funkcji F wystarczy znaleźć funkcję odwrotną do F. Funkcja ta parze złożonej z wektora $\vec{J}$ i jego współrzędnej k przyporządkowuje parę złożoną z liczby k i ciągu $b(k,\vec{J})$ powstającego z $\vec{J}$ przez usunięcie wyrazu k. Potrzebna będzie jeszcze pomocnicza funkcja i, która wektorowi $\vec{J}$ i jego współrzędnej k przyporządkowuje indeks tej współrzędnej $i(k,\vec{J})$. Łatwo dowieść, że ta funkcja spełnia równość $i(k,\vec{J}) = m(k,b(k,\vec{J})) + 1$. Dzięki przytoczonym faktom interesujący nas wyznacznik możemy przekształcać w następujący sposób:

$$
\begin{aligned}
&| \, G_n(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n;\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_n) \, | \\
&= \sum_{\vec{j}}\sum_{k\notin\vec{j}}(-1)^{m(k,\vec{j})} a_{1,k}\left|W_{\vec{j}}(\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n)\right|\left|W_{c(k,\vec{j})}(\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_n)\right| \\
&= \sum_{\vec{J}}\sum_{k\in\vec{J}}(-1)^{m(k,b(k,\vec{J}))} a_{1,k}\left|W_{b(k,\vec{J})}(\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n)\right|\left|W_{\vec{J}}(\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_n)\right| \\
&= \sum_{\vec{J}}\left|W_{\vec{J}}(\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_n)\right|\sum_{k\in\vec{J}}(-1)^{i(k,\vec{J})-1}(-1)^2 a_{1,k}\left|W_{b(k,\vec{J})}(\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n)\right| \\
&= \sum_{\vec{J}}\left|W_{\vec{J}}(\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_n)\right|\left|W_{\vec{J}}(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n)\right| = \sum_{\vec{J}}\left|W_{\vec{J}}(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n)\right|\left|W_{\vec{J}}(\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_n)\right|.
\end{aligned}
$$

□

Będą nas szczególnie interesowały macierze

$$\mathcal{G}_n(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n) = G_n(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n;\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n).$$

Nazywamy je macierzami Grama (odpowiedniego układu wektorów). Jest oczywiste, że macierze Grama są symetryczne. Wyznacznik macierzy Grama nazywamy krótko wyznacznikiem Grama. Zauważmy, że

Fakt 14.2 Niech A będzie macierzą o n wierszach. Przyjmijmy, że wierszami macierzy A są wektory $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in R^m$. Wtedy

$$AA^T = \mathcal{G}_n(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n).$$

Wniosek 14.3 *Dla dowolnych wektorów $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in R^m$ $(n \leq m)$ i dla macierzy A o n wierszach, której i-tym wierszem jest wektor $\vec{a}_i$, mamy*

$$|\, \mathcal{G}_n(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \,| = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_n \leq m} \left| A^{1,\ldots,n;j_1,\ldots,j_n} \right|^2 .$$

Podany wzór w przypadku $n = m$ przyjmuje postać

$$|\, \mathcal{G}_n(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \,| = |\, A \,|^2$$

(i jest także oczywistą konsekwencją poprzedniego faktu). Tak więc każdy wyznacznik Grama jest liczbą nieujemną.

Wniosek 14.4 *Wzór z poprzedniego wniosku wyrażający wyznacznik macierzy $\mathcal{G}_2(\vec{a}, \vec{b})$ dla $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_m)$ i $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ ma postać*

$$(\sum_{i=1}^m a_i^2)(\sum_{i=1}^m b_i^2) - (\sum_{i=1}^m a_i b_i)^2 = \sum_{1 \leq k < l \leq m} (a_k b_l - a_l b_k)^2$$

i w konsekwencji

$$|\, \sum_{i=1}^m a_i b_i) \,| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2}.$$

14.3 Nierówność Hadamarda

Zauważmy najpierw, że zachodzi następująca nierówność:

Lemat 14.5 *Jeżeli $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in R^n$ i $k < n$, to*

$$|\, \mathcal{G}_n(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \,| \leq |\, \mathcal{G}_k(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k) \,||\, \mathcal{G}_{n-k}(\vec{a}_{k+1}, \ldots, \vec{a}_n) \,|.$$

Dowód. Przypuśćmy, że $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ są kolejnymi wierszami macierzy A. Skorzystamy kolejno z wniosku 14.3, uogólnionego rozwinięcia Laplace'a (patrz rozdz. 14.1), nierówności z wniosku 14.4, z oczywistych zależności między macierzami $A_{\vec{x};\vec{y}}$ oraz $A^{\vec{u};\vec{v}}$ z uzupełniającymi się indeksami oraz ponownie z lematu 14.3. Z wymienionych faktów wynika, że

$$\begin{aligned}
&\sqrt{|\, \mathcal{G}_n(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \,|} \\
&= |\,|\, A \,|\,| = |\sum_{\vec{y}=(y_1,\ldots,y_k)} (-1)^{s(1,\ldots,k)+s(\vec{y})} |\, A^{1,\ldots,k;\vec{y}} \,||\, A_{1,\ldots,k;\vec{y}} \,|\,| \\
&\leq \sqrt{\sum_{\vec{y}=(y_1,\ldots,y_k)} |\, A^{1,\ldots,k;\vec{y}} \,|^2} \cdot \sqrt{\sum_{\vec{y}=(y_1,\ldots,y_k)} |\, A_{1,\ldots,k;\vec{y}} \,|^2} \\
&= \sqrt{\sum_{\vec{y}=(y_1,\ldots,y_k)} |\, A^{1,\ldots,k;\vec{y}} \,|^2} \cdot \sqrt{\sum_{\vec{x}=(x_1,\ldots,x_{n-k})} |\, A^{k+1,\ldots,n;\vec{x}} \,|^2} \\
&= \sqrt{|\, \mathcal{G}_k(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k) \,|} \cdot \sqrt{|\, \mathcal{G}_{n-k}(\vec{a}_{k+1}, \ldots, \vec{a}_n) \,|}.
\end{aligned}$$

□

Dążymy do wykazania, że udowodniona nierówność jest prawdziwa dla dowolnych podziałów dowolnych wyznaczników Grama. Wymaga to udowodnienia pomocniczego lematu potrzebnego także w dalszych rozważaniach.

Lemat 14.6 *Dla dowolnego układu liniowo niezależnych wektorów $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in R^m$ ($n \leq m$) istnieją wektory $\vec{b}_{n+1}, \ldots, \vec{b}_m \in R^m$ długości 1, parami ortogonalne i ortogonalne do każdego z wektorów $\vec{a}_i$. Ponadto układ $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}_{n+1}, \ldots, \vec{b}_m$ o takich własnościach jest bazą w przestrzeni R^m.*

Dowód. Najpierw udowodnimy drugą cześć tezy. Przypuśćmy, że

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{a}_i + \sum_{j=n+1}^{m} \beta_j \vec{b}_j = 0$$

i pomnóżmy tę równość stronami przez $\vec{b}_j$. Korzystając z ortogonalności wektorów i założenia o długości wektora $\vec{b}_j$ pokazujemy, że iloczyn $\vec{b}_j$ i lewej strony równości jest równy β_j. Wobec tego

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{a}_i = 0$$

i wystarczy powołać się na założenie o niezależności liniowej wektorów $\vec{a}_i$.

Aby dowieść pierwszą część tezy wystarczy pokazać, że każdy liniowo niezależny układ mniej niż m wektorów w R^m można uzupełnić o wektor unormowany i ortogonalny do pozostałych, a następnie to rozumowanie powtórzyć odpowiednio wiele razy.

Aby wykazać podany fakt, rozważmy układ równań

$$\vec{a}_1 \vec{x} = 0, \ldots, \vec{a}_n \vec{x} = 0$$

ze zmiennymi $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ i załóżmy, że $n < m$. Zbiór rozwiązań tego układu jest niezerową podprzestrzenią R^m, a więc układ ten ma rozwiązanie $\vec{b}$ o długości 1. Jest oczywiste, że wektor $\vec{b}$ ma żądane własności. □

Fakt 14.7 *Dla wektorów $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}_{n+1}, \ldots, \vec{b}_m$ takich, jak w poprzednim lemacie prawdziwa jest równość*

$$\mathcal{G}_m(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}_{n+1}, \ldots, \vec{b}_m) = \mathcal{G}_n(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n).$$

□

Wniosek 14.8 *Jeżeli $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in R^m$ i $k < n \leq m$, to*

$$|\, \mathcal{G}_n(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \,| \leq |\, \mathcal{G}_k(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k) \,|\,|\, \mathcal{G}_{n-k}(\vec{a}_{k+1}, \ldots, \vec{a}_n) \,|.$$

Dowód. Uzupełnijmy układ $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ o wektory $\vec{b}_{n+1}, \ldots, \vec{b}_m$ spełniające tezę poprzedniego lematu. Wtedy

$$\begin{aligned}
&|\, \mathcal{G}_n(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \,| = |\, \mathcal{G}_m(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}_{n+1}, \ldots, \vec{b}_m) \,| \\
&\leq |\, \mathcal{G}_k(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k) \,| \cdot |\, \mathcal{G}_{m-k}(\vec{a}_{k+1}, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}_{n+1}, \ldots, \vec{b}_m) \,| \\
&= |\, \mathcal{G}_k(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k) \,| \cdot |\, \mathcal{G}_{n-k}(\vec{a}_{k+1}, \ldots, \vec{a}_n) \,|.
\end{aligned}$$

□

Wniosek 14.9 (nierówność Hadamarda) *Przypuśćmy, że $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ są kolejnymi wierszami macierzy A. Wtedy*

$$|\, A \,| \leq \prod_{i=1}^{n} |\, \vec{a}_i \,|.$$

Dowód. Zauważmy, że

$$|\, A \,|^2 = |\, \mathcal{G}_n(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \,| \leq |\, \mathcal{G}_1(\vec{a}_1) \,| \cdot |\, \mathcal{G}_{n-1}(\vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n) \,| \leq \ldots \leq \prod_{i=1}^{n} |\, \mathcal{G}_1(\vec{a}_i) \,| = \prod_{i=1}^{n} |\, \vec{a}_i \,|^2.$$

□