15 Wstęp do nierówności liniowych

15.1 Rozwiązania bazowe układu nierówności liniowych

Wektor $\vec{x}_0 \in R^n$ jest bazowym rozwiązaniem układu nierówności $A\vec{x} \geq \vec{b}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A\vec{x}_0 \geq \vec{b}$ oraz $\vec{x}_0$ spełnia pewien układ złożony z n liniowo niezależnych równań należących do układu $A\vec{x} = \vec{b}$. Jest oczywiste, że układ nierówności ma skończenie wiele rozwiązań bazowych. Będziemy się też posługiwać analogicznie zdefiniowanym pojęciem rozwiązania bazowego układu złożonego zarówno z nierówności, jak i równań liniowych. Uwypukleniem zbioru $V \subseteq R^n$ nazywamy zbiór wszystkich kombinacji wypukłych wektorów ze zbioru V, czyli zbiór

$$\{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{v}_i \in R^n : \alpha_i \geq 0 \wedge \vec{v}_i \in V \text{ dla } i = 1, \ldots, m \text{ oraz } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1\}.$$

Twierdzenie 15.1 (znane na przełomie XIX i XX w.) *Niech $\mathcal{A}$ będzie układem nierówności (i równań) liniowych*

$$A_1\vec{x} \geq \vec{b}_1 \quad \textit{oraz } A_2\vec{x} = \vec{b}_2$$

z macierzą główną o liniowo niezależnych kolumnach (a więc takim, że warunek $A_1\vec{x} = \vec{0}$ i $A_2\vec{x} = \vec{0}$ zachodzi tylko dla wektora $\vec{x} = \vec{0}$). Niech V będzie uwypukleniem zbioru rozwiązań bazowych tego układu, a W – zbiorem rozwiązań układu $A_1\vec{x} \geq \vec{0}$ i $A_2\vec{x} = \vec{0}$. Wtedy każde rozwiązanie układu $\mathcal{A}$ daje się przedstawić w postaci sumy $\vec{v} + \vec{w}$ wektorów $\vec{v} \in V$ i $\vec{w} \in W$.

Dowód. Przyjmijmy oznaczenia wprowadzone w sformułowaniu twierdzenia. Dodatkowo, symbolem $\mathcal{A}_0$ będziemy oznaczać układ złożony z nierówności $A_1\vec{x} \geq \vec{0}$ i równości $A_2\vec{x} = \vec{0}$. Dowód przeprowadzimy przez indukcję ze względu na liczbę nierówności występujących w układzie $\mathcal{A}$ (liczbę wierszy macierzy A_1).

Jeżeli macierz A_1 ma zero wierszy, to układ $\mathcal{A}$ jest układem równań liniowych i z założenia o liniowej niezależności kolumn jego macierzy głównej wynika, że ma najwyżej jedno rozwiązanie, które jest także rozwiązaniem bazowym. Stąd teza twierdzenia wynika w sposób oczywisty. Dalej bedziemy zajmować się układami z niepustą macierzą A_1.

Niech $\mathcal{A}'$ będzie układem powstającym z układu $\mathcal{A}$ przez zastąpienie równościami kilku nierówności z tego układu (z zachowaniem obu stron nierówności, a więc w kilku nierównościach wymazujemy znak $\geq$ i w to miejsce wpisujemy znak $=$). Niech V' i W' oznaczają zbiory zdefiniowane dla układu $\mathcal{A}'$ w taki sposób, jak definiowaliśmy zbiory V i W dla układu $\mathcal{A}$. Zauważmy, że $V' \subseteq V$ i $W' \subseteq W$.

Zauważmy także, że zbior W jest zamknięty ze względu na sumowanie wektorów i mnożenie wektorów przez liczby dodatnie.

Niech $\vec{x}_0$ będzie ustalonym wektorem spełniającym układ $\mathcal{A}$. Będziemy konstruować odpowiednie przedstawienie $\vec{x}_0$. Oczywiście, wektor $\vec{x}_0$ jest także rozwiązaniem układu $A_2\vec{x} = \vec{b}_2$ (a więc zachodzi jeden z dwóch niżej analizowanych przypadków).

Przypadek 1: równanie $A_2\vec{x} = \vec{b}_2$ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Wtedy jedynym rozwiązaniem układu $A_2\vec{x} = \vec{b}_2$ jest wektor $\vec{x}_0$ i jest on rozwiązaniem bazowym układu $\mathcal{A}$. Tak więc $\vec{x}_0 + \vec{0}$ jest szukanym przedstawieniem wektora $\vec{x}_0$.

Przypadek 2: równanie $A_2\vec{x} = \vec{b}_2$ ma przynajmniej dwa rozwiązania. Istnieje więc wektor $\vec{y}_0 \neq 0$ taki, że $A_2\vec{y}_0 = \vec{0}$. Dla tego wektora zachodzi warunek $A_1\vec{y}_0 \neq \vec{0}$, gdyż w przeciwnym razie $\vec{y}_0$ byłby wektorem zerowym. Jeżeli $\vec{a}$ jest wierszem macierzy A_1, a b jest odpowiadającym mu elementem wektora $\vec{b}_1$, to definiujmy zbiór

$$T_{\vec{a}} = \{t \in R : \vec{a}(\vec{x}_0 + t\vec{y}_0) \geq b\}.$$

Oczywiście, $0 \in T_{\vec{a}}$. Będziemy badać zbiór

$$T = \{t \in R : A_1(\vec{x}_0 + t\vec{y}_0) \geq \vec{b}_1\} = \bigcap_{\vec{a} - \text{ wiersz } A_1} T_{\vec{a}}.$$

Przypuśćmy, że $\vec{a}$ jest wierszem macierzy A_1 takim, że $\vec{a}\vec{y}_0 > 0$. Wtedy dla

$$t = t_{\vec{a}} = \frac{b - \vec{a}\vec{x}_0}{\vec{a}\vec{y}_0}$$

zachodzi równość $\vec{a}(\vec{x}_0 + t\vec{y}_0) = b$, dla wszystkich $t > t_{\vec{a}}$ zachodzi nierówność $\vec{a}(\vec{x}_0 + t\vec{y}_0) > b$, a dla wszystkich $t < t_a$ mamy $\vec{a}(\vec{x}_0 + t\vec{y}_0) < b$. Wobec tego, $T_{\vec{a}} = [t_{\vec{a}}, \infty)$ oraz $t_{\vec{a}} \leq 0$. Podobnie dowodzimy, że jeżeli $\vec{a}\vec{y}_0 < 0$, to $T_{\vec{a}} = (-\infty, t_{\vec{a}}]$ dla $t_{\vec{a}} \geq 0$. Zauważmy jeszcze, że jeżeli $\vec{a}\vec{y}_0 = 0$, to $T_{\vec{a}} = (-\infty, \infty)$.

Przypadek 2.1: $A_1\vec{y}_0 \geq \vec{0}$. Wtedy $T = [t_{\vec{a}}, \infty)$ dla pewnego wiersza $\vec{a}$ macierzy A_1 takiego, że $t_{\vec{a}} \leq 0$. Rozważmy wektor $\vec{x}_0 + t_{\vec{a}}\vec{y}_0$. Wektor ten spełnia nierówność z wiersza $\vec{a}$, czyli nierówność $\vec{a}\vec{x} \geq b$, w ten sposób, że po podstawieniu go za $\vec{x}$ obie strony nierówności stają się równe. Niech $\mathcal{A}'$ będzie układem powstającym przez usunięcie nierówności $\vec{a}\vec{x} \geq b$ z układu $A_1\vec{x} \geq \vec{b}_1$ i dołączenie do układu $A_2\vec{x} = \vec{b}_2$ równości $\vec{a}\vec{x} = b$. Jest oczywiste, że wektor $\vec{x}_0 + t_{\vec{a}}\vec{y}_0$ spełnia układ $\mathcal{A}'$. Dla układu $\mathcal{A}'$ możemy skorzystać z założenia indukcyjnego. Tak więc $\vec{x}_0 + t_{\vec{a}}\vec{y}_0 = \vec{v} + \vec{w}$ dla pewnych wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$ takich, że $\vec{v}$ jest kombinacją wypukłą rozwiązań bazowych układu $\mathcal{A}'$, a $\vec{w}$ spełnia układ wszystkich nierówności $A_1\vec{w} \geq \vec{0}$ z wyjątkiem $\vec{a}\vec{w} \geq 0$, układ równości $A_2\vec{w} = \vec{0}$, a także równość $\vec{a}\vec{w} = 0$.

Jest oczywiste, że wektor $\vec{w}$ spełnia także układ $\mathcal{A}_0$, a $\vec{v}$ jest kombinacją wypukłą rozwiązań bazowych układu $\mathcal{A}$. Zachodzi też równość

$$\vec{x}_0 = \vec{v} + (\vec{w} - t_{\vec{a}}\vec{y}_0).$$

Jest to szukane przedstawienie wektora $\vec{x}_0$.

Przypadek 2.2: $A_1\vec{y}_0 \leq \vec{0}$. W tym przypadku $T = (-\infty, t_{\vec{a}}]$ dla pewnego wiersza $\vec{a}$ takiego, że $t_{\vec{a}} \geq 0$, i potrzebne przedstawienie wektora $\vec{x}_0$ znajdujemy tak, jak w poprzednim przypadku.

Przypadek 2.3: istnieją wiersze $\vec{a}$ i $\vec{a}'$ macierzy A_1 takie, że $\vec{a}\vec{y}_0 < 0 < \vec{a}'\vec{y}_0$. Tym razem $T = [t_{\vec{a}'}, t_{\vec{a}}]$ oraz $t_{\vec{a}'} \leq 0 \leq t_{\vec{a}}$. Tak jak w przypadku 2.1 znajdujemy wektory $\vec{v}$ i $\vec{v}'$ bedące kombinacjami wypukłymi rozwiązań bazowych oraz wektory $\vec{w}$ i $\vec{w}'$ spełniające układ $\mathcal{A}_0$, takie że

$$\vec{x}_0 + t_{\vec{a}}\vec{y}_0 = \vec{v} + \vec{w} \quad \text{i} \quad \vec{x}_0 + t_{\vec{a}'}\vec{y}_0 = \vec{v}' + \vec{w}'.$$

Wobec tego, jeżeli dodatkowo przyjmiemy, że $t_{\vec{a}} \neq t_{\vec{a}'}$, to

$$\vec{x}_0 = \frac{t_{\vec{a}}(\vec{x}_0 + t_{\vec{a}'}\vec{y}_0) - t_{\vec{a}'}(\vec{x}_0 + t_{\vec{a}}\vec{y}_0)}{t_{\vec{a}} - t_{\vec{a}'}} = (\frac{t_{\vec{a}}}{t_{\vec{a}} - t_{\vec{a}'}}\vec{v}' + \frac{-t_{\vec{a}'}}{t_{\vec{a}} - t_{\vec{a}'}}\vec{v}) + (t_{\vec{a}}\vec{w}' + (-t_{\vec{a}'})\vec{w})$$

i mamy odpowiednie przedstawienie wektora $\vec{x}_0$. Jeżeli natomiast $t_{\vec{a}} = t_{\vec{a}'}$, to $t_{\vec{a}} = 0$ i szukanym przedstawieniem wektora $\vec{x}_0$ jest $\vec{v} + \vec{w}$. □

Wniosek 15.2 *Każdy niesprzeczny układ nierówności liniowych o liniowo niezależnych kolumnach ma rozwiązanie bazowe.* □

Wniosek 15.3 *Jeżeli układ nierówności liniowych ma ograniczony zbiór rozwiązań, to każde jego rozwiązanie jest kombinacją wypukłą rozwiązań bazowych.*

Dowód. Najpierw zauważmy, że jeżeli $\vec{y}_0 \neq \vec{0}$, to zbiór $\{\vec{x}_0 + t\vec{y}_0 : t > 0\}$ zawiera dowolnie długie wektory i jest nieograniczony.

Przypuśćmy, że rozważamy układ $A\vec{x} \geq \vec{b}$ i wektor $\vec{x}_0$ jest rozwiązaniem tego układu.

Jeżeli kolumny macierzy A nie są liniowo niezależne, to istnieje niezerowy wektor $\vec{y}_0$ taki, że $A\vec{y}_0 = \vec{0}$. Wtedy wszystkie wektory postaci $\vec{x}_0 + t\vec{y}_0$ spełniają układ $A\vec{x} \geq \vec{b}$, a więc zbiór rozwiązań takiego układu jest nieoraniczony.

Jeżeli układ $A\vec{x} \geq \vec{0}$ ma rozwiązanie $\vec{y}_0 \neq \vec{0}$, każdy wektor $\vec{x}_0 + t\vec{y}_0$ dla $t \geq 0$ jest rowiązaniem układu $A\vec{x} \geq \vec{b}$. Także w tym przypadku zbiór rozwiązań układu $A\vec{x} \geq \vec{b}$ jest nieograniczony.

Wobec tego, jeżeli zbiór rozwiązań układu $A\vec{x} \geq \vec{b}$ jest ograniczony, to spełnione są założenia twierdzenia 15.1 i dodatkowo jedynym rozwiązaniem układu $A\vec{x} \geq \vec{0}$ jest wektor zerowy. Teraz teza jest prostą konsekwencją twierdzenia 15.1. □

Twierdzenie 15.1 zawiera najważniejsze i najtrudniejsze do udowodnienia informacje o układach nierówności liniowych, potrzebne do opracowania metody rozwiązywania takich układów. Dalsze szczgóły dotyczące rozwiązywania nierówności liniowych znajdują się w rozdziale poświęconym pracy von zur Gathena i Sievekinga.

15.2 Lemat Farkasa

Lemat 15.4 *Przypuśmy, że mamy niezerowe wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$. Jeżeli $\vec{v}\vec{w} \leq 0$, to pewna kombinacja wypukła tych wektorów jest krótsza od każdego z nich.*

Dowód. Wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$ są różne, gdyż w przeciwnym razie ich iloczyn skalarny byłby dodatni.

Niech α będzie dane wzorem

$$\alpha = \frac{\vec{w}(\vec{w} - \vec{v})}{(\vec{w} - \vec{v})^2} = \frac{\vec{w}^2 - \vec{v}\vec{w}}{\vec{w}^2 - 2\vec{v}\vec{w} + \vec{v}^2}.$$

Oczywiście, $0 < \alpha < 1$. Zauważmy także, że

$$(\vec{w} - \alpha(\vec{w} - \vec{v}))(\vec{w} - \vec{v}) = 0.$$

Weźmy wektor $\vec{h}$ taki, że

$$\vec{h} = \alpha\vec{v} + (1 - \alpha)\vec{w} = \vec{w} - \alpha(\vec{w} - \vec{v})$$

(jest to wysokość trójkąta wyznaczonego przez wektory $\vec{w}$ i $\vec{v}$). Zachodzą więc następujące równości:

$$\vec{h}(\vec{w} - \vec{v}) = 0$$

oraz

$$\vec{w} = \vec{h} + \alpha(\vec{w} - \vec{v}) \quad \text{i} \quad \vec{v} = \vec{h} + (\alpha - 1)(\vec{w} - \vec{v}).$$

Podnosząc te równości obustronnie do kwadratu otrzymujemy

$$\vec{w}^2 = \vec{h}^2 + \alpha^2(\vec{w} - \vec{v})^2 \quad \text{i} \quad \vec{v}^2 = \vec{h}^2 + (\alpha - 1)^2(\vec{w} - \vec{v})^2.$$

Ponieważ $0 < \alpha < 1$ i $\vec{w} - \vec{v} \neq \vec{0}$, więc

$$|\,\vec{w}\,|^2 = \vec{w}^2 > \vec{h}^2 = |\,\vec{h}\,|^2 \quad \text{i} \quad |\,\vec{v}\,|^2 = \vec{v}^2 > \vec{h}^2 = |\,\vec{h}\,|^2. \ \square$$

Lemat 15.5 *Niech $V \subseteq R^m$ będzie skończenie generowalnym, niepustym zbiorem wypukłym. W zbiorze V istnieje element krótszy od wszystkich innych elementów V.*

Dowód. Przypuśćmy, że V jest generowany przez wektory $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$. Rozważmy funkcję $f : R^n \to R^m$ zdefiniowaną wzorem

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i.$$

Zbiór $\{| \vec{v} | : \vec{v} \in V\}$ jest ograniczony z dołu i dlatego ma kres dolny. Niech a będzie tym kresem. Wszystkie elementy zbioru V są wartościami funkcji f dla nieujemnych argumentów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ takich, że $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Możemy więc wybrać ciąg o nieujemnych wyrazach

$$(\alpha_{1,k}, \ldots, \alpha_{n,k}) \in R^n$$

takich, że $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,k} = 1$ oraz

$$\lim_{k\to\infty} | f(\alpha_{1,k}, \ldots, \alpha_{n,k}) | = a.$$

Oczywiście, $0 \leq \alpha_{i,k} \leq 1$. Z każdego ciągu liczb rzeczywistych z przedziału $[0, 1]$ można wybrać podciąg zbieżny. Powtarzając wybieranie n razy dostajemy zbieżny ciąg o wyrazach postaci $(\alpha_{1,k}, \ldots, \alpha_{n,k})$. Niech $(\alpha_{1,k_j}, \ldots, \alpha_{n,k_j})$ będzie tym ciągiem i niech

$$\lim_{j\to\infty} (\alpha_{1,k_j}, \ldots, \alpha_{n,k_j}) = (\alpha_{1,0}, \ldots, \alpha_{n,0}).$$

Z ciągłości funkcji f wynika, że

$$\lim_{j\to\infty} f(\alpha_{1,k_j}, \ldots, \alpha_{n,k_j}) = f(\alpha_{1,0}, \ldots, \alpha_{n,0}).$$

Zauważmy, że liczby $\alpha_{i,0}$ spełniają równość $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,0} = 1$. Tak więc $f(\alpha_{1,0}, \ldots, \alpha_{n,0}) \in V$.

Oznaczmy wektor $f(\alpha_{1,0}, \ldots, \alpha_{n,0})$ symbolem $\vec{h}$. Ciągłość funkcji przyporządkowującej wektorowi jego długość implikuje, że

$$a = \lim_{j\to\infty} | f(\alpha_{1,k_j}, \ldots, \alpha_{n,k_j}) | = | f(\alpha_{1,0}, \ldots, \alpha_{n,0}) | = | \vec{h} |.$$

W ten sposób dowiedliśmy, że $\vec{h}$ jest najkrótszym wektorem w zbiorze V. □

Lemat 15.6 *Niech $V \subseteq R^m$ będzie skończenie generowalnym, niepustym zbiorem wypukłym. Jeżeli $0 \notin V$, to istnieje niezerowy wektor $\vec{v} \in R^m$ taki, że $\vec{v}\vec{w} > 0$ dla wszystkich $\vec{w} \in V$.*

Dowód. Na podstawie lematu 15.5 znajdujemy najkrótszy wektor $\vec{v} \in V$. Oczywiście, $\vec{v} \neq \vec{0}$. Przypuśćmy, że dla pewnego $\vec{w} \in V$ zachodzi nierówność $\vec{v}\vec{w} \leq 0$. Wtedy, korzystając z lematu 15.4, konstruujemy wektor $\vec{v}' \in V$, który jest krótszy od $\vec{v}$. Przeczy to definicji $\vec{v}$. □

Wniosek 15.7 (lemat Farkasa) *Przyjmijmy, że $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in R^m$. Układ nierówności $\vec{v}_j\vec{x} > 0$ dla $j = 1, \ldots, k$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieją nieujemne liczby $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, nie wszystkie równe 0, takie że*

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \vec{v}_j = \vec{0}.$$

Dowód. Przypuśćmy, że układ nierówności $\vec{v}_j\vec{x} > 0$ dla $j = 1, \ldots, k$ ma rozwiązanie $\vec{x}_0$ i jednocześnie istnieją nieujemne liczby $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ o podanych własnościach. Wtedy suma

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j(\vec{v}_j\vec{x}_0)$$

jest dodatnia. Z drugiej jednak strony

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j(\vec{v}_j\vec{x}_0) = (\sum_{j=1}^{k} \alpha_j\vec{v}_j)\vec{x}_0 = \vec{0}\vec{x}_0 = 0.$$

W ten sposób otrzymaliśmy sprzeczność.

Dla dowodu implikacji odwrotnej załóżmy, że nie istnieją nieujemne liczby $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ o własnościach podanych w tezie wniosku. Niech V będzie uwypukleniem zbioru $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$. Ponieważ równość wyrażającą własność liczb α_i można podzielić stronami przez dowolną liczbę różną od zera nie powodując zmiany prawej strony tej równości, więc istnienie liczb α_i jest równoważne warunkowi $\vec{0} \in V$. Stąd otrzymujemy, że $\vec{0} \notin V$. Możemy więc skorzystać z lematu 15.6. Wynika z niego, że dla pewnego wektora $\vec{h}$ i dowolnego elementu $\vec{v} \in V$ zachodzi nierówność $\vec{v}\vec{h} > 0$. Oznacza to, że wektor $\vec{h}$ jest rozwiązaniem układu nierówności $\vec{v}_j\vec{x} > 0$ dla $j = 1, \ldots, k$. □

15.3 Twierdzenie Papadimitriou

Lemat 15.8 *Jeżeli A jest macierzą o wymiarach $m \times m$ o wyrazach całkowitych co do wartości bezwzględnej mniejszych lub równych a, to wyznacznik macierzy A ma wartość bezwzględną mniejszą lub równą $m! \cdot a^m \leq (ma)^m$.* □

Lemat 15.9 *Przypuśćmy, że wektory $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in R^m$ mają całkowite współrzędne o wartościach bezwzględnych nie przekraczających a. Niech $M = (ma)^m$. Istnieją nieujemne liczby rzeczywiste $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nie wszystkie równe 0 takie, że*

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j\vec{v}_j = \vec{0}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją nieujemne liczby całkowite $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \leq M$ nie wszystkie równe 0 takie, że

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j\vec{v}_j = \vec{0}.$$

Dowód. Możemy dodatkowo założyć, że a jest dodatnią liczbą naturalną. Przypuśćmy, że

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j\vec{v}_j = \vec{0}$$

dla pewnych nieujemnych liczb $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nie wszystkich równych 0. Umówmy się, że α_k jest różna od zera. Podaną równość możemy podzielić stronami przez α_k. Możemy więc założyć, że podana równość zachodzi dla pewnych nieujemnych liczb $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ takich, że $\alpha_k \geq 1$. Rozważmy układ złożony z następujących nierówności:

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j\vec{v}_j = \vec{0}$$

$$\alpha_i \geq 0 \quad \text{dla } i = 1, \ldots, k-1$$

oraz

$$\alpha_k \geq 1.$$

Jest to układ ze zmiennymi $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, kolumny macierzy głównej tego układu są liniowo niezależne, i układ ten ma rozwiązanie. Wobec tego ma rozwiązanie bazowe. Rozwiązanie bazowe tego układu spełnia pewien jednoznaczny układ równań zawarty w układzie

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \vec{v}_j = \vec{0}$$

$$\alpha_i = 0 \quad \text{dla } i = 1, \ldots, k-1$$

oraz

$$\alpha_k = 1.$$

Ten jednoznaczny układ musi zawierać równanie ostatnie, gdyż w przeciwnym razie jego rozwiązaniem jest wektor $\vec{0}$, który nie spełnia ostatniego równania ($\vec{0}$ nie jest rozwiązaniem bazowym). Wobec tego kolumna wyrazów wolnych tego układu zawiera zera i dokładnie jedną jedynkę. Z wzorów Cramera wynika, że istnieją macierze $A_1, \ldots, A_k$ oraz A takie, że rozwiązanie tego układu równań jest dane wzorami

$$\alpha_i = \frac{|\, A_i \,|}{|\, A \,|}.$$

Nietrudno zauważyć, że wyżej podany układ nierówności spełniają również liczby

$$\alpha_i' = \text{znak}(|\, A \,|) \cdot |\, A_i \,|.$$

Oszacujemy więc wartości bezwzględne wyznaczników macierzy A_i.

Macierze A_i zawierają kolumnę wyrazów wolnych układu. Kolumnę tę można usunąć wraz z wierszem odpowiadającym równaniu $\alpha_k = 1$ zmieniając najwyżej znak wyznacznika. Podobnie można usunąć wiersze odpowiadające równaniom $\alpha_j = 0$ dla $j < k$ wraz z odpowiednimi kolumnami. Po tych operacjach pozostaje macierz mająca nie więcej niż m kolumn i wierszy o wyrazach będących współrzędnymi wektorów $\vec{v}_j$. Wartość bezwględna wyznacznika tej macierzy nie przekracza $m!a^m < M$. □

Lemat 15.10 *Przypuśćmy, że wektory $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in R^m$ mają całkowite współrzędne o wartościach bezwzględnych nie przekraczających a. Niech $M = (ma)^m$. Istnieje wektor $\vec{h}$ taki, że $\vec{h}\vec{v}_j > 0$ dla $j = 1, \ldots, k$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wektor $\vec{h}$ o całkowitych współrzędnych, których wartości bezwzględne nie przekraczają M, i taki, że $\vec{h}\vec{v}_j \geq 1$ dla $j = 1, \ldots, k$.*

Dowód. Przypuśćmy, że istnieje wektor $\vec{h} = (h_1, \ldots, h_m)$ taki, że $\vec{h}\vec{v}_j > 0$ dla $j = 1, \ldots, k$. Mnożąc ten wektor przez odpowiednią liczbę możemy spowodować, że będzie on spełniać dla $j = 1, \ldots, k$ nierównosci $\vec{h}\vec{v}_j \geq 1$. Dobierając odpowiednio znaki możemy spowodować, że będą spełnione także wszystkie nierówności postaci $\pm h_j \geq 0$. Weźmy rozwiązanie bazowe układu

$$\vec{h}\vec{v}_j \geq 1 \;\text{ dla }\; j = 1, \ldots, k$$

oraz

$$\pm h_j \geq 0 \;\text{ dla }\; j = 1, \ldots, m.$$

Dalej postępujemy tak, jak w poprzednim dowodzie, i znajdujemy rozwiązanie o współczynnikach całkowitych spełniające oszacowania podane w tezie lematu. □

Twierdzenie 15.11 (Papadimitriou) *Niech A będzie macierzą o wymiarach $n \times m$ o wyrazach całkowitych i niech $\vec{b} \in R^m$ będzie wektorem o współrzędnych całkowitych. Załóżmy, że elementy A i b mają wartości bezwzględne $\leq a$. Jeżeli układ m równań $A\vec{x} = \vec{b}$ z n niewiadomymi ma rozwiązanie złożone z liczb naturalnych, to ma także rozwiązanie złożone z liczb naturalnych nie przekraczających $(n+1)(ma)^{2m+1}$.*

Dowód. Niech $M = m!a^m$. Weźmy naturalne rozwiązanie układu $A\vec{x} = \vec{b}$ o najmniejszej sumie jego składowych. Jeżeli składowe rozwiązania $\vec{x}$ nie przekraczają M, to zachodzi teza twierdzenia. W przeciwnym razie możemy założyć, że $x_j \geq M$ dla $j = 1, \ldots, k$. Będziemy rozważać k pierwszych kolumn macierzy A, powiedzmy, że kolumnami A są wektory $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in R^m$.

Przypadek 1: rzypuśćmy, że istnieją liczby naturalne $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ nie wszystkie równe 0 i nie przekraczające M takie, że $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \vec{v}_j = 0$. Wtedy wektor $\vec{x}' = (x_1 - \alpha_1, \ldots, x_k - \alpha_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ jest rozwiązaniem układu $A\vec{x} = \vec{b}$ i przeczy to minimalności (w podanym sensie) rozwiązania $\vec{x}$.

Przypadek 2: przeciwnym razie, na podstawie wniosku 15.7 oraz lematów 15.9 i 15.10 stwierdzamy, że istnieje wektor $\vec{h} \in R^m$ o całkowitych współrzednych, których wartości bezwzględne są $\leq M$, spełniający nierówności postaci $\vec{h}\vec{v}_j \geq 1$ dla $j = 1, \ldots, k$. Pomnóżmy równość $A\vec{x} = \vec{b}$ przez $\vec{h}$. W ten sposób otrzymujemy, że

$$\vec{h}\vec{b} = \vec{h}A\vec{x} = (\vec{h}\vec{v}_1, \ldots, \vec{h}\vec{v}_n)\vec{x} = \sum_{j=1}^{k} \vec{h}\vec{v}_j x_j + \sum_{j=k+1}^{n} \vec{h}\vec{v}_j x_j.$$

Wobec tego

$$\sum_{j=1}^{k} x_j \leq \sum_{j=1}^{k} \vec{h}\vec{v}_j x_j = \vec{h}\vec{b} - \sum_{j=k+1}^{n} \vec{h}\vec{v}_j x_j \leq maM + nmaM^2 \leq (n+1)(ma)^{2m+1}.$$

□