16 Nierówności liniowe i problem niesprzeczności

16.1 Rozwiązywanie układów nierówności liniowych

Będziemy rozważać układy równości i nierówności liniowych. Każdy taki układ daje się zapisać w postaci

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n &\geq b_1 \\ &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + \ldots + a_{m,n}x_n &\geq b_m. \end{aligned}$$

W skrócie taki układ będziemy zapisywać jako

$$A\vec{x} \geq \vec{b}$$

(w tym wzorze należałoby pisać $\vec{x}^T$ zamiast $\vec{x}$), gdzie A jest macierzą

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ & \ddots & \\ a_{m,1} & \ldots & a_{m,n} \end{bmatrix},$$

$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_m)$, a nierówność $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_m) \geq \vec{b}$ oznacza, że $a_i \geq b_i$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, m$.

Przypuśćmy, że mamy dane wektory $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m \in R^n$, a także, że są to wiersze macierzy A. Niech V będzie podprzestrzenią liniową R^n generowaną przez te wektory. Zbiór

$$V^\perp = \{\vec{x} \in R^n : \vec{a}_i\vec{x} = 0 \text{ dla } i = 1, \ldots, m\}$$

nazywamy dopełnieniem ortogonalnym przestrzeni V. Jest oczywiste, że dopełnienie ortogonalne przestrzeni V także jest podprzestrzenią liniową. Zauważmy, że jezeli rozważamy przestrzeń V generowaną przez wiersze macierzy A, to dopełnienie ortogonalne V jest zbiorem rozwiązań układu $A\vec{x} = \vec{0}$. Tak więc rozwiązywanie tego układu równań może polegać na szukaniu bazy (zbioru generatorów) przestrzeni $V^\perp$. Najważniejszą dla nas, znaną własność dopełnienia ortogonalnego wyraża

Lemat 16.1 *Niech $V \subseteq R^n$ będzie podprzestrzenią liniową. Każdy wektor z przestrzeni R^n jest sumą wektora z przestrzeni V i wektora należącego do dopełnienia ortogonalnego V.* □

Rozważmy dowolny układ nierówności $A\vec{x} \geq \vec{b}$. Będziemy teraz zajmować się rozwiązywaniem tego układu.

Krok 1. Rozwiążmy równanie $A\vec{x} = \vec{0}$ znajdując zbiór generatorów przestrzeni $\{\vec{x} \in R^n : A\vec{x} = \vec{0}\}$. Znalezione generatory wpisujemy jako wiersze do macierzy $A^\perp$. Z podanego niżej lematu wynika, że rozwiązanie układu $A\vec{x} \geq \vec{b}$ jest w pewien sposób wyznaczone przez rozwiązanie układu $A\vec{x} \geq \vec{b}$ uzupełnionego o równości $A^\perp\vec{x} = \vec{0}$.

Lemat 16.2 *Każdy wektor $\vec{x} \in R^n$ spełniający układ nierówności $A\vec{x} \geq \vec{b}$ jest sumą $\vec{y}+\vec{z}$ wektorów $\vec{y}, \vec{z} \in R^n$ takich, że $A\vec{y} \geq \vec{b}$, $A^\perp\vec{y} = \vec{0}$ oraz $A\vec{z} = \vec{0}$. Ponadto, każda suma takiej postaci jest rozwiązaniem rozważanego układu.*

Dowód. Druga część tezy jest oczywista. Aby dowieść pierwszą, weźmy podprzestrzeń V generowaną przez wiersze macierzy A. Zgodnie z lematem 16.1, dowolny wektor $\vec{x}_0$ jest sumą $\vec{y}_0 + \vec{z}_0$, gdzie $\vec{y}_0 \in V$, a $\vec{z}_0 \in V^\perp$. Wektor $\vec{z}_0$ jest rozwiązaniem układu $A\vec{x} = \vec{0}$.

Jest oczywiste, że jeżeli $\vec{x}_0$ jest rozwiązaniem układu $A\vec{y} \geq \vec{b}$, to jego rozwiązaniem jest także $\vec{y}_0$. Aby zakończyć dowód wystarczy zauważyć, że $A^\perp\vec{y}_0 = \vec{0}$. Tak jest, ponieważ $\vec{y}_0 \in V$ i jest ortogonalny do każdego wektora z przestrzeni $V^\perp$, a więc i do każdego wiersza macierzy $A^\perp$. □

Lemat 16.3 *Jeżeli wektor $\vec{x}$ spełnia równości $A\vec{x} = \vec{0}$ i $A^{\perp}\vec{x} = \vec{0}$, to $\vec{x} = \vec{0}$.*

Dowód. Wystarczy dowieść, że kwadrat skalarny wektora $\vec{x}$ jest równy zero. Zgodnie z definicją macierzy $A^{\perp}$, równość $A\vec{x} = 0$ oznacza, że $\vec{x}$ jest kombinacją liniową $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{a}_i$ wierszy $A^{\perp}$. Stąd i z równości $A^{\perp}\vec{x} = \vec{0}$ otrzymujemy, że

$$\vec{x}^2 = \vec{x}(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{a}_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{x}\vec{a}_i = 0. \ \square$$

Tak więc, zgodnie z lematem 16.3, rozwiązywanie dowolnego układu nierówności zostało sprowadzone do rozwiązywania układu $A\vec{x} \geq \vec{b}$ z macierzą, dla której równość $A\vec{x} = 0$ implikuje, że $\vec{x} = \vec{0}$. Macierz A, dla której spełniony jest ten warunek, ma liniowo niezależne kolumny. Jeżeli macierz A ma tę własność, to układ nierówności $A\vec{x} \geq \vec{b}$ będziemy określać jako układ z macierzą o liniowo niezależnych kolumnach.

Wniosek 16.4 *Układ $A\vec{x} \geq \vec{b}$ nierówności liniowych jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy niesprzeczny jest układ $A\vec{x} \geq \vec{b}$ uzupełniony o równości $A^{\perp}\vec{x} = \vec{0}$.* $\square$

Krok 2. Podstawowe własności układu nierówności liniowych z macierzą o liniowo niezależnych kolumnach wynikają z twierdzenia 15.1. Najpierw zauważmy, że to twierdzenie stwierdza, że rozwiązanie dowolnego układu $A\vec{x} \geq \vec{b}$ o liniowo niezależnych kolumnach jest wyznaczone w określony sposób przez rozwiązanie układu $A\vec{x} \geq \vec{0}$ (i dodatkowo, przez rozwiązania pewnych układów rownań). Ponadto, z tego twierdzenia wynikają takie oto lematy:

Lemat 16.5 *Załóżmy, że rozważamy układ nierówności $A\vec{x} \geq \vec{b}$ z macierzą o liniowo niezależnych kolumnach. Następujące warunki są równoważne:*

1) *zbiór rozwiązań układu $A\vec{x} \geq \vec{b}$ jest ograniczony,*

2) *rozwiązanie układu $A\vec{x} \geq \vec{b}$ nie zawiera żadnej półprostej, a więc zbioru postaci $\{\vec{x}_0 + t\vec{y}_0 : t \geq 0\}$ dla niezerowego wektora $\vec{y}_0$.*

3) *warunek $A\vec{x} \geq \vec{0}$ implikuje, że $\vec{x} = \vec{0}$.* $\square$

Przypomnijmy jeszcze dwa wnioski zamieszczone już w rozdziale 15.1.

Wniosek 16.6 *Jeżeli zbiór rozwiązań układu $A\vec{x} \geq \vec{b}$ jest ograniczony, to jest uwypukleniem zbioru rozwiązań bazowych tego układu.* $\square$

Wniosek 16.7 *Układ nierówności z macierzą o liniowo niezależnych kolumnach jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy ma rozwiązanie bazowe.* $\square$

Krok 3. Teraz będziemy rozważać układ $A\vec{x} \geq \vec{0}$ z macierzą o liniowo niezależnych kolumnach. Przypuśćmy, że $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m$ są wierszami macierzy A oraz $\vec{a} = \vec{a}_1 + \ldots + \vec{a}_m$.

Lemat 16.8 *Jeżeli A jest macierzą z liniowo niezależnymi kolumnami, to dla dowolnego c, zbiór rozwiązań układu $A\vec{x} \geq \vec{0}$ i $\vec{a}\vec{x} \leq c$ jest ograniczony.*

Dowód. Weźmy półprostą $P = \{\vec{x}_0 + t\vec{y}_0 : t \geq 0\}$ o kierunku niezerowego wektora $\vec{y}_0$. Zgodnie z lematem 16.5, powinniśmy pokazać, że półprosta P nie jest zawarta w zbiorze rozwiązań rozważanego układu $\mathcal{A}$. Załóżmy, że jednak jest zawarta.

Zauważmy, że niezerowe rozwiązania $\vec{x}$ układu $\mathcal{A}$ spełniają także nierówność $\vec{a}\vec{x} > 0$. Nierówność $\vec{a}\vec{x} \geq 0$ jest oczywista. Jeżeli jednak $\vec{a}\vec{x} = 0$, to także $0 \leq \vec{a}_i\vec{x} \leq \vec{a}\vec{x} = 0$ i z liniowej niezależności kolumn macierzy A otrzymujemy, że $\vec{x} = \vec{0}$, a to przeczy założeniu.

Wektor $\vec{x}_0$ jest jednym z elementów P. Wobec tego, spełnia układ $\mathcal{A}$. Pokażemy, że $\vec{y}_0$ też jest rozwiązaniem układu $\mathcal{A}$.

Przypuśćmy, że $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m$ są wierszami macierzy A i $\vec{a}_i\vec{y}_0 < 0$. Wtedy nierówność $\vec{a}_i(\vec{x}_0 + t\vec{y}_0) \geq 0$ jest równoważna nierówności

$$t \leq \frac{-\vec{a}_i\vec{x}_0}{\vec{a}_i\vec{y}_0}.$$

która nie zachodzi dla wszystkich $t \geq 0$. Z założenia dowodu nie wprost wynika, że zachodzi dla wszystkich takich t. Tak więc $\vec{a}_i\vec{y}_0 \geq 0$. Ponieważ $\vec{x}_0 + \vec{y}_0$ też spełnia układ $\mathcal{A}$, więc

$$c \geq \vec{a}(\vec{x}_0 + \vec{y}_0) \geq \vec{a}\vec{x}_0 + \vec{a}\vec{y}_0 \geq \vec{a}\vec{y}_0.$$

Wobec tego, $\vec{y}_0$ jest rozwiązaniem układu $\mathcal{A}$ i, w konsekwencji, $\vec{a}\vec{y}_0 > 0$

Na podstawie założenia dowodu nie wprost, nierówność

$$\vec{a}(\vec{x}_0 + t\vec{y}_0) \leq c$$

jest spełniona dla wszystkich $t \geq 0$. Z drugiej strony, jest równoważna nierówności

$$t \leq \frac{c - \vec{a}\vec{x}_0}{\vec{a}\vec{y}_0},$$

a więc nie jest spełniona dla wszystkich takich t. Uzyskana sprzeczność kończy dowód. $\square$

Lemat 16.9 *Niech A będzie macierzą o liniowo niezależnych kolumnach. Niezerowy wektor $\vec{x}_0$ spełnia układ $A\vec{x} \geq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $t \geq 0$ taka, że $t\vec{x}_0$ spełnia układ $A\vec{x} \geq 0$ uzupełniony o równość $\vec{a}\vec{x} = 1$.*

Dowód. Oczywiście, wystarczy udowodnić jedną implikację. Jak w dowodzie poprzedniego lematu pokazujemy, że $\vec{a}\vec{x}_0 > 0$ i bierzemy

$$t = \frac{1}{\vec{a}\vec{x}_0}. \ \square$$

Ostatni lemat wyraża rozwiązanie układu postaci $A\vec{x} \geq 0$ (dla odpowiedniej macierzy A) przez rozwiązanie pewnego układu o ograniczonym zbiorze rozwiązań, a takie układy, zgodnie z wnioskiem 16.6, potrafimy już rozwiązywać.

16.2 Problemy niesprzeczności dla układów nierówności

Najprostszym problemem niesprzeczności dla układów nierówności jest następujący

Problem 16.1 (niesprzeczności układu nierówności liniowych)
Dane: macierz A i wektor $\vec{b}$, o wyrazach całkowitych,
Zadanie: sprawdzić, czy układ nierówności $A\vec{x} \geq \vec{b}$ ma rozwiązanie złożone z liczb wymiernych.

Nietrudno zauważyć, że z wniosków 16.4 i 16.7, oraz z lematu 16.3 wynika naiwny algorytm rozwiązywania problemu 16.1. Inny algorytm rozwiązujący ten problem jest znany pod nazwą metody sympleks. Jest to sprawny algorytm, ale wykładniczy w najgorszym przypadku (być może średni czas wykonywania tego algorytmu jest wielomianowy). Pierwszy wielomianowy algorytm rozwiązujący problem 16.1 jest oparty o metodę elipsoid. Matematyczne podstawy metody elipsoid i idea algorytmu zostały przedstawione w rozdziale ??.

Ważny jest też następujący

Problem 16.2 (niesprzeczności układu całkowitych nierówności liniowych)
Dane: macierz A i wektor $\vec{b}$, o wyrazach całkowitych,
Zadanie: sprawdzić, czy układ nierówności $A\vec{x} \geq \vec{b}$ ma rozwiązanie złożone z liczb całkowitych.

Z twierdzenia 12.3, stosując oczywistą redukcję polegającą na dopisaniu do układu równań nierówności $\vec{x} \geq \vec{0}$, otrzymujemy

Wniosek 16.10 *Problem 16.2 jest silnie* **NP***-trudny.* □

Problem 16.2 należy też do klasy **NP**, a więc jest silnie **NP**-zupełny. Podobnie jak w przypadku problemu niesprzeczności dla układów diofantycznych równań linionych, istnienie wielomianowego, niedeterministycznego algorytmu rozwiązującego problem 16.2 wynika z możliwości odpowiedniego oszacowania pewnego rozwiązania. Potrzebne oszacowanie zostało zauważone przez von zur Gathena i Sievekinga, i jest przedstawione w rozdziale 16.3 (patrz twierdzenie 16.14). Zastosowana tam metoda dowodu zawiera też dalsze informacje o rozwiązywaniu układów nierówności liniowych.

Rozważane są też problemy niesprzeczności dla układów z n zmiennymi, a więc dla takich układów nierówności i jego szczególny przypadek dotyczący równań.

Problem 16.3 (niesprzeczności układu całkowitych nierówności liniowych z n zmiennymi)

Dane: macierz A o n kolumnach i wektor $\vec{b}$, A i $\vec{b}$ o wyrazach całkowitych,
Zadanie: sprawdzić, czy układ nierówności $A\vec{x} \geq \vec{b}$ ma rozwiązanie złożone z liczb całkowitych.

Problem 16.4 (niesprzeczności układu całkowitych równań liniowych z n zmiennymi)

Dane: macierz A o n kolumnach i wektor $\vec{b}$, A i $\vec{b}$ o wyrazach całkowitych,
Zadanie: sprawdzić, czy układ równań $A\vec{x} = \vec{b}$ ma rozwiązanie złożone z liczb całkowitych.

Problemy 16.3 i 16.4 są wielomianowe (patrz twierdzenie 13.10 i wynikający z niego wniosek), a świadczące o tym algorytmy konstruuje się wykorzystując własności tzw. krat. W rozdziale 13 zostały przedstawione podstawowe własności krat i algorytm korzystający z krat, rozwiązujący problem 16.4 (prostszy z dwóch rozważanych).

16.3 Twierdzenie von zur Gathena i Sievekinga

Twierdzenie 16.11 *Niech $\mathcal{A}$ będzie układem nierówności (i równań) liniowych*

$$A_1\vec{x} \geq \vec{0} \ \ \textit{oraz} \ A_2\vec{x} = \vec{0}$$

z n zmiennymi i z macierzą o liniowo niezależnych kolumnach. Symbolem $\mathcal{A}^=$ oznaczmy układ równań

$$A_1\vec{x} = \vec{0} \ \ \textit{oraz} \ A_2\vec{x} = \vec{0}.$$

Przypuśćmy, że $G \subseteq R^n$ jest zbiorem wektorów spełniającym następujące warunki:

1) jeżeli $\vec{g} \in G$, to $\vec{g}$ jest niezerowym wektorem spełniającym układ $\mathcal{A}$,

2) jeżeli $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}^=$ jest ukladem złożonym z $n-1$ niezależnych równań takim, że układ $\mathcal{B} \cup \mathcal{A}$ ma niezerowe rozwiązanie, to układ $\mathcal{B}$ jest spełniony przez pewien element zbioru G.

Wtedy każdy wektor spełniający układ $\mathcal{A}$ jest kombinacją o nieujemnych współczynnikach elementów zbioru G.

Dowód. Weźmy niezerowy wektor $\vec{x}_0$ spełniający układ $\mathcal{A}$. Przyjmijmy, że $\vec{a}_0$ jest sumą $\sum_{i=1}^{k} \vec{a}_i$ wszystkich wierszy macierzy A_1 oraz wszystkich wierszy macierzy A_2. Będziemy rozważać układ $\mathcal{A} \cup \{\vec{a}_0\vec{x} = \vec{a}_0\vec{x}_0\}$. Oczywiście $\vec{x}_0$ jest rozwiązaniem tego układu.

Niech W będzie zbiorem rozwiązań układu $\mathcal{A} \cup \{\vec{a}_0\vec{x} = 0\}$. Przypuśćmy, że $\vec{x}$ jest rozwiązaniem tego układu. Ponieważ $\vec{x}$ spełnia układ $\mathcal{A}$, więc $\vec{a}_i\vec{x} \geq 0$ dla $i = 1, \ldots, k$. Równości

$$0 = \vec{a}_0\vec{x} = (\sum_{i=1}^{k} \vec{a}_i)\vec{x} = \sum_{i=1}^{k} (\vec{a}_i\vec{x})$$

stwierdzają, że 0 jest sumą pewnych liczb nieujemnych. Wszystkie te liczby muszą więc być równe 0. To z kolei oznacza, że $\vec{x}$ jest rozwiązaniem układu $\mathcal{A}^=$. Z założenia o liniowej niezależności wierszy macierzy układu $\mathcal{A}$ wynika, że układ $\mathcal{A}^=$ ma tylko rozwiązanie zerowe. Wobec tego $\vec{x} = \vec{0}$ i w konsekwencji $W = \{\vec{0}\}$.

Niech V będzie uwypukleniem zbioru rozwiązań bazowych układu $\mathcal{A} \cup \{\vec{a}_0\vec{x} = \vec{a}_0\vec{x}_0\}$. Na podstawie twierdzenia 15.1 i równości $W = \{\vec{0}\}$ stwierdzamy, że $\vec{x}_0 \in V$. Przyjmijmy, że $\vec{x}_0 = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i\vec{b}_i$, gdzie $\vec{b}_i$ są niezerowymi rozwiązaniami bazowymi wspomnianego układu, a α_i – liczbami nieujemnymi.

Wektor $\vec{b}_i$ jest rozwiązaniem pewnego układu n niezależnych równań zawartych w $\mathcal{A}^= \cup \{\vec{a}_0\vec{x} = \vec{a}_0\vec{x}_0\}$. Gdyby ten układ nie zawierał równania $\vec{a}_0\vec{x} = \vec{a}_0\vec{x}_0$, to jego rozwiązaniem byłby tylko wektor zerowy. Wobec tego jest on postaci $\mathcal{B}_i \cup \{\vec{a}_0\vec{x} = \vec{a}_0\vec{x}_0\}$, gdzie $\mathcal{B}_i$ składa się z $n-1$ niezależnych równań należących do układu $\mathcal{A}^=$. Wektor $\vec{b}_i$ jest także niezerowym rozwiązaniem układu $\mathcal{B}_i \cup \mathcal{A}$. Na podstawie własności 2) przysługującej zbiorowi G stwierdzamy, że pewien wektor $\vec{g}_i \in G$ jest rozwiązaniem układu $\mathcal{B}_i$. Ponieważ jest to układ $n-1$ niezależnych równań z n niewiadomymi, więc każde dwa rozwiązania tego układu są współliniowe. Niech więc $\vec{b}_i = \beta_i\vec{g}_i$. Korzystając z tego, że $\vec{b}_i$ jest rozwiązaniem równania $\vec{a}_0\vec{x} = \vec{a}_0\vec{x}_0$ można wykazać, że $\beta_i \geq 0$. Jest oczywiste, że

$$\vec{x}_0 = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i\vec{b}_i = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i\beta_i\vec{g}_i$$

jest szukanym przedstawieniem wektora $\vec{x}_0$. □

Lemat 16.12 *Niech $\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_m$ będą dowolnymi wektorami w przestrzeni R^n oraz załóżmy, że*

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\vec{g}_i$$

dla pewnych nieujemnych liczb $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Wtedy istnieją nieujemne liczby $\beta_i, \ldots, \beta_n$ oraz indeksy $i_1, \ldots, i_n$ nie przekraczające m takie, że

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j\vec{g}_{i_j}.$$

Dowód. Możemy dodatkowo założyć, że $m > n$. Rozważmy układ ze zmiennymi $z_1, \ldots, z_m$ złożony z układu n równań

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{m} z_i\vec{g}_i$$

oraz z układu m nierówności postaci

$$z_i \geq 0$$

dla $i = 1, \dots, m$. Jest oczywiste, że liczby $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ są rozwiązaniem tego układu. Rozwiązanie to, zgodnie z twierdzeniem 15.1, daje się przedstawić w postaci sumy dwóch wektorów, z których jeden jest kombinacją rozwiązań bazowych rozważanego układu. Układ ten ma więc rozwiązanie bazowe. Weźmy takie rozwiązanie $\alpha'_1, \dots, \alpha'_m$. Rozwiązanie to musi spełniać przynajmniej $m-n$ równań postaci $z_i = 0$. Przypuśćmy, że pozostałe zmienne mają indeksy $i_1, \dots, i_n$ (indeksy mogą się powtarzać) oraz zdefiniujmy β_j jako α'_{i_j} (lub jako 0, dla kolejnych wystąpień tego samego indeksu). Oczywiście zachodzą nastąpujące równości

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{m} \alpha'_i \vec{g}_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \vec{g}_{i_j}.$$

□

Lemat 16.13 *Niech A oznacza macierz*

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ & & \ddots & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \end{bmatrix}$$

o wymiarach $n \times n-1$. Przyjmijmy, że A_i oznacza macierz powstającą z A przez usunięcie i-tej kolumny oraz

$$\vec{z}_0 = (| A_1 |, -| A_2 |, | A_3 |, \dots, (-1)^{n+1} | A_n |).$$

Wektory $\vec{z}_0$ oraz $-\vec{z}_0$ są rozwiązaniami układu $A\vec{x} = \vec{0}$. Ponadto, jeżeli macierz A ma liniowo niezależne wiersze, to wektor $\vec{z}_0$ jest niezerowy.

Dowód. Utwórzmy macierz

$$\begin{bmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,n} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ & & \ddots & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \end{bmatrix}.$$

Wyznacznik tej macierzy jest równy 0 (macierz ta ma dwa identyczne wiersze). Rozwijając ten wyznacznik wzdłuż pierwszego wiersza otrzymujemy równość

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{i,j} | A_j | = 0$$

oznaczającą, że wektor $\vec{z}_0$ spełnia i-te równanie układu $A\vec{x} = \vec{0}$. Tak więc wektor $\vec{z}_0$ jest rozwiązaniem układu $A\vec{x} = \vec{0}$. Wiadomo, że zbiór rozwiązań takiego układu jest podprzestrzenią liniową, a więc także $-\vec{z}_0$ jest rozwiązaniem tego układu.

Aby dowieść drugą część tezy zauważny, że każdy układ $n-1$ liniowo niezależnych wektorów w przestrzeni R^n można rozszerzyć do układu n niezależnych wektorów. Wobec tego macierz A możemy tak uzupełnić dopisując jeden wiersz, aby jej wyznacznik był rózny od zera. Jeżeli wyznacznik tak otrzymanej macierz rozwiniemy wzdłuż dodanego wiersza i $\vec{z}_0 = \vec{0}$, to wyznacznik ten równałby się 0. □

Twierdzenie 16.14 (von zur Gathen, Sieveking) *Niech $\mathcal{A}$ będzie układem nierówności (i równań) liniowych*

$$A_1\vec{x} \geq \vec{b}_1 \quad \textit{oraz } A_2\vec{x} = \vec{b}_2$$

z niewiadomymi $x_1, \ldots, x_n$. Przyjmijmy, że macierz A powstaje przez uzupełnienie macierzy A_1 wierszami macierzy A_2 i ma m wierszy, b jest sumą wartości bezwzględnych współrzędnych wektorów $\vec{b}_1$ i $\vec{b}_2$, a D jest liczbą większą lub równą wartościom bezwzględnym wyznaczników dowolnych podmacierzy o wymiarach $\leq \min(n-1, m)$, zawartych w macierzy A. Jeżeli układ $\mathcal{A}$ ma rozwiązanie całkowite, to ma także rozwiązanie całkowite złożone z liczb o wartościach bezwzględnych $\leq (n+b)D$.

Dowód. Będziemy posługiwać się oznaczeniami wprowadzonymi w sformułowaniu twierdzenia.

Weźmy całkowite rozwiązanie $\vec{x}_0$ układu $\mathcal{A}$. Niech ε_i będzie równe 1 wtedy i tylko wtedy i tylko wtedy, gdy i-ta współrzędna wektora $\vec{x}_0$ jest nieujemna, a dla pozostałych i przyjmujemy, że ε_i jest równe -1. Wobec tego wektor $\vec{x}_0$ spełnia układ złożony z nierówności

$$\varepsilon_i x_i \geq 0 \tag{45}$$

dla $i = 1, \ldots, n$. Niech $\mathcal{A}^+$ będzie sumą układu $\mathcal{A}$ i układu (45). Oczywiście $\vec{x}_0$ spełnia układ $\mathcal{A}^+$. Twierdzenie wystarczy dowieść dla $\mathcal{A}^+$. Zauważmy jeszcze, że macierz tego układu ma liniowo niezależne kolumny.

Oznaczmy symbolem A^+ macierz układu $\mathcal{A}^+$. Wierszami tej macierzy są więc wiersze macierzy A i wiersze postaci $(0, \ldots, \varepsilon_i, \ldots, 0)$ dla $i = 1, \ldots, n$. Przyjmijmy, że D^+ oznacza największą liczbę spośród modułów wyznaczników podmacierzy o $n-1$ wierszach, zawartych w macierzy A^+. Zauważmy, że zachodzi nierówność $D^+ \leq D$. Aby się o tym przekonać wystarczy wziąc dowolną podmacierz o $n-1$ wierszach, zawartą w A^+, i obliczyć jej wyznacznik rozwijając go kolejno wzdłuż wszystkich wierszy postaci $(0, \ldots, \varepsilon_i, \ldots, 0)$.

Niech V^+ będzie uwypukleniem zbioru rozwiązań bazowych układu $\mathcal{A}^+$, a W^+ – zbiorem rozwiązań układu

$$A_1\vec{x} \geq \vec{0} \text{ oraz } A_2\vec{x} = \vec{0}$$

uzupełnionego o nierówności układu (45). Zgodnie z twierdzeniem 15.1, wektor $\vec{x}_0$ jest sumą $\vec{v} + \vec{w}$ dla pewnych $\vec{v} \in V^+$ i $\vec{w} \in W^+$.

Twierdzenie 16.11 pozwala opisać wektor $\vec{w}$, ale wymaga wskazania zbioru G o własnościach podanych w jego sformuławaniu. Weźmy więc układ $\mathcal{A}^=$ złożony z równań

$$A_1\vec{x} = \vec{0} \text{ oraz } A_2\vec{x} = \vec{0},$$

a także z równań

$$\varepsilon_i x_i = 0$$

dla $i = 1, \ldots, n$. Niech $\mathcal{B}$ będzie podukładem $\mathcal{A}^=$ złożonym z $n-1$ niezależnych równań. Dalej będziemy się zajmować takimi układami $\mathcal{B}$, których pewne niezerowe rozwiązanie (oznaczmy je $\vec{y}$) spełnia cały układ $\mathcal{A}^=$. Z lematu 16.13 wynika, że pewne niezerowe wektory $\vec{z}_0$ i $-\vec{z}_0$ o całkowitych współrzędnych, zdefiniowane w sformułowaniu lematu, są rozwiązaniami układu $\mathcal{B}$. Zbiór rozwiązań układu $\mathcal{B}$ jest przestrzenią jednowymiarową. Wobec tego $\vec{z}_0 = t\vec{y}$ dla pewnego t. Możemy założyć, że $t \geq 0$. W przeciwnym razie obie strony równości pomnożymy przez -1 i zamiast wektora $\vec{z}_0$ weźmiemy $-\vec{z}_0$. Jeżeli $\vec{z}_0 = t\vec{y}$ i $t \geq 0$, to wektor $\vec{z}_0$ spełnia układ $\mathcal{A}^=$, gdyż $\vec{y}$ spełnia ten układ i zbiór rozwiązań tego układu jest zamknięty ze względu na mnożenie przez liczby nieujemne. Zauważmy ponadto, że wartości bezwzględne współrzędnych $\vec{z}_0$ nie przekraczają D^+.

Dla każdego z rozważanych układów $\mathcal{B}$ mamy więc pewien wektor $\vec{z}_0$ opisany w poprzednim akapicie. Zbiór G tworzymy z takich wektorów $\vec{z}_0$ wyznaczonych przez poszczególne układy $\mathcal{B}$. Łatwo sprawdzić, że tak określony zbiór G spełnia założenia twierdzenia

16.11. Niech $G = \{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_k\}$. Korzystając z twierdzenia 16.11 wektor $\vec{x}_0$ przedstawiamy w postaci

$$\vec{v} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{g}_i$$

dla nieujemnych liczb $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Wobec lematu 16.12 i po ewentualnym przenumerowaniu elementów G, przedstawieniu temu możemy nadać postać

$$\vec{v} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{g}_i.$$

Weźmy wektor

$$\vec{x}_1 = \vec{v} + \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i \vec{g}_i,$$

gdzie α'_i jest częścią ułamkową liczby α_i. Oczywiście $0 \leq \alpha'_i < 1$. Wektor $\vec{x}_1$, jak każdy inny wektor takiej postaci, jest rozwiązaniem układu $\mathcal{A}^+$, i to rozwiązaniem całkowitym. Będziemy szacować współrzędne wektora $\vec{x}_1$. Łatwo oszacować współrzędne sumy będącej drugim składnikiem $\vec{x}_1$. Ich wartości bezwzględne nie przekraczają $nD^+ \leq nD$. Aby zakończyć dowód wystarczy oszacować wartości bezwzględne współrzędnych $\vec{v}$ przez $bD^+ \leq bD$.

Wektor $\vec{v}$ jest kombinacją wypukłą bazowych rozwiązań układu $\mathcal{A}^+$. Zauważmy, że gdyby współrzędne rozwiązań bazowych udałoby się oszacować przez bD^+, to analogiczne oszacowanie byłoby prawdziwe dla dowolnych kombinacji wypukłych tych rozwiązań. Niech więc $\vec{v}'$ będzie rozwiązaniem bazowym układu $\mathcal{A}^+$. Wektor $\vec{v}'$ jest rozwiązaniem pewnego układu n niezależnych równań. Wyobraźmy sobie macierz tego układu. Macierz główna tego ukladu jest podmacierzą macierzy A^+. Wyrazy wolne tego układu są współrzędnymi albo wektora $\vec{b}_1$, albo wektora $\vec{b}_2$, albo też są równe 0. Zgodnie z wzorami Cramera, wartości bezwzględne współrzędnych $\vec{v}'$ są z dokładnością do znaku ilorazem dwóch wyznaczników, i dają się oszacować przez moduł wyznacznika znajdującego się w liczniku. Jest to wyznacznik macierzy powstającej z macierzy głównej układu przez zastąpienie jednej z kolumn kolumną wyrazów wolnych. Rozwińmy go wzdłuż kolumny wyrazów wolnych. Wtedy okaże się sumą iloczynów współczynników wektorów $\vec{b}_1$ lub $\vec{b}_2$, i wyznaczników podmacierzy o $n-1$ wierszach, zawartych w macierzy A^+. Ponieważ każdy ze współczynników wektorów $\vec{b}_1$ i $\vec{b}_2$ występuje w tej sumie najwyżej jeden raz, moduł tej sumy nie jest większy od bD^+. $\square$