

# Algorytmy ewolucyjne

Piotr Lipiński

## Zadanie podziału obiektów na kategorie

- Danych jest  $n$  obiektów. Każdemu obiektowi należy przypisać jedną z  $k$  kategorii, w taki sposób, aby osiągnąć jak największą wartość funkcji celu (oceniającej cały podział  $n$  obiektów na  $k$  kategorii).
  
- Przykładowe zastosowania:
  - grupowanie danych,
  - kolorowanie grafów,
  - pakowania kontenerów.
  
- Podstawowe problemy:
  - Jak reprezentować dane?
  - Jak zaprojektować operatory ewolucyjne?
  
- Podstawowe podejścia:
  - kodowanie grup za pomocą liczb (von Laszewski)
  - kodowanie grup za pomocą separatorów
  - grupujący algorytm genetyczny (Falkenauer)

## Kodowanie grup za pomocą liczb (von Laszewski)

- Kodowanie:
  - Osobnik składa się z chromosomu całkowitoliczbowego  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  długości  $n$ , którego każda  $i$ -ta składowa  $x_i$  reprezentuje numer grupy przypisanej  $i$ -temu obiektowi.
- Operatory ewolucyjne:
  - krzyżowanie strukturalne (von Laszewskiego)
  - mutacja strukturalna (von Laszewskiego)

## Przykład chromosomu

(1 1 2 3 1 1 2 3 2 2 3 3)

Oznacza że:

I grupa	II grupa	III grupa
{1,2,5,6}	{3,7,9,10}	{4,8,11,12}

## Krzyżowanie strukturalne

- Mamy dwóch rodziców (z łańcuchami 12 elementowymi:

$$P1 = (1\ 1\ 2\ 3\ 1\ 1\ 2\ 3\ 2\ 2\ 3\ 3)$$

$$P2 = (1\ 1\ 2\ 1\ 2\ 3\ 1\ 2\ 2\ 3\ 3\ 3)$$

## Krzyżowanie strukturalne

Te łańcuchy rodziców

$$P1 = (1\ 1\ 2\ 3\ 1\ 1\ 2\ 3\ 2\ 2\ 3\ 3)$$

$$P2 = (1\ 1\ 2\ 1\ 2\ 3\ 1\ 2\ 2\ 3\ 3\ 3)$$

dekodujemy na następujące podziały:

$$P1: \{1,2,5,6\} \{3,7,9,10\} \{4,8,11,12\}$$

$$P2: \{1,2,4,7\} \{3,5,8,9\} \{6,10,11,12\}$$

## Krzyżowanie strukturalne

---

P1: {1,2,5,6} {3,7,9,10} {4,8,11,12}

P2: {1,2,4,7} {3,5,8,9} {6,10,11,12}

Losowo wybieramy grupę i kopiujemy  
elementy, pozostałe grupy przepisujemy

P3: {1,2,4,7} {3,5,7,8,9,10} {6,10,11,12}

## Krzyżowanie strukturalne

---

P3: {1,2,4,7} {3,5,7,8,9,10} {6,10,11,12}

Z pozostałych grup usuwamy elementy  
powtarzające się:

P3: {1,2,4} {3,5,7,8,9,10} {6,11,12}

Otrzymujemy taki łańcuch:

P3 = (1 1 2 1 2 3 2 2 2 2 3 3)

## Krzyżowanie strukturalne

P1: {1,2,5,6} {3,7,9,10} {4,8,11,12}

P2: {1,2,4,7} {3,5,8,9} {6,10,11,12}

P3: {1,2,4} {3,5,7,8,9,10} {6,11,12}

P3 = (1 1 2 1 2 3 2 2 2 3 3)

Można zastosować dodatkowo mechanizm przywracający poprzednią licznosc grup:

Elementy, które nie zostały skopiowane

wymazujemy z łańcucha w tym przypadku są to

elementy „5” i „8”:

P3 = (1 1 2 1 \* 3 2 \* 2 2 3 3)

## Krzyżowanie strukturalne

P3 = (1 1 2 1 \* 3 2 \* 2 2 3 3)

Miejsce gwiazdek zamieniamy (losowo) na liczby

dwoch innych podziałów (czyli w naszym przypadku

jest to element „7” z grupy „1” oraz element

„10” z grupy 3 u drugiego rodzica, czyli

w miejsce gwiazdek wstawiamy losowo numery

grup „1” i „3”)  $\Rightarrow$

P3 = (1 1 2 1 3 3 2 1 2 2 3 3)

## Mutacja strukturalna

---

- Wybieramy losowo dwa obiekty np. 4 i 6 i zamieniamy je miejscami

$P = (1\ 1\ 2\ \underline{1}\ 3\ \underline{3}\ 2\ 1\ 2\ 2\ 3\ 3)$

$P' = (1\ 1\ 2\ \underline{3}\ 3\ \underline{1}\ 2\ 1\ 2\ 2\ 3\ 3)$

## Rozwiązanie

---

- kodowanie grup za pomocą liczb  
(von Laszewski)
- kodowanie za pomocą separatorów
- grupujący algorytm genetyczny (Falkenauer)

## Kodowanie za pomocą separatorów

- Chromosom długości  $n+k-1$   $\{i_1, i_2, \dots, i_{n+k-1}\}$
- Liczby całkowite z zakresu  $\{1, \dots, n\}$  reprezentują obiekty
- Liczby całkowite z zakresu  $\{n+1, \dots, n+k-1\}$  reprezentują separatory
- Krzyżowanie
  - z częściowym dopasowaniem (PMX)
  - z uporządkowaniem (OX)
- Mutacja losowa (dwóch obiektów)

## Przykład chromosomu

Dla tak określonego osobnika:

I grupa	II grupa	III grupa
{1,2}	{3,4,5}	{6,7}

chromosom reprezentujemy jako łańcuch:

(1 2 8 3 4 5 9 6 7)

gdzie „8” i „9” są separatorami

## Krzyżowanie

---

- Krzyżowanie z częściowym dopasowaniem (PMX)
- Krzyżowanie z uporządkowaniem (OX)

## Krzyżowanie

---

- Krzyżowanie z częściowym dopasowaniem (PMX)
- Krzyżowanie z uporządkowaniem (OX)



## Krzyżowanie z częściowym dopasowaniem

### (PMX)

- Zaproponowane przez Goldberga i Lingle'a
- Idea: wybiera losową grupę od jednego rodzica i pozostawia porządek i pozycje tak wielu elementów drugiego rodzica, jak tylko jest to możliwe

## Krzyżowanie z częściowym dopasowaniem

### (PMX)

- Mamy dwa łańcuchy 11-elementowe, gdzie liczby 10 i 11 są separatorami:  
P1 = (1 2 3 10 4 5 6 7 11 8 9)  
P2 = (4 5 2 10 1 8 7 6 11 9 3)
- Losowo wybieramy numer grupy i kopiujemy elementy do potomków (P1->O2, P2->O1):  
O1 = (x x x 10 1 8 7 6 11 x x)  
O2 = (x x x 10 4 5 6 7 11 x x)

## Krzyżowanie z częściowym dopasowaniem

(PMX)

$$O1 = (x \ x \ x \ \underline{10} \ 1 \ 8 \ 7 \ 6 \ \underline{11} \ x \ x)$$

$$O2 = (x \ x \ x \ \underline{10} \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ \underline{11} \ x \ x)$$

Ta wymiana określa ciąg odwzorowań:

1-4, 8-5, 7-6, 6-7

## Krzyżowanie z częściowym dopasowaniem

(PMX)

$$O1 = (x \ x \ x \ \underline{10} \ 1 \ 8 \ 7 \ 6 \ \underline{11} \ x \ x)$$

$$O2 = (x \ x \ x \ \underline{10} \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ \underline{11} \ x \ x)$$

- Do pozostałych grup dokładamy te elementy które nie powodują konfliktu:

$$O1 = (x \ 2 \ 3 \ \underline{10} \ 1 \ 8 \ 7 \ 6 \ \underline{11} \ x \ 9)$$

$$O2 = (x \ x \ 2 \ \underline{10} \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ \underline{11} \ 9 \ 3)$$

## Krzyżowanie z częściowym dopasowaniem

### (PMX)

Jakie elementy powodują konflikt ?

$$O1 = (x \ 2 \ 3 \ \underline{10} \ 1 \ 8 \ 7 \ 6 \ \underline{11} \ x \ 9)$$

$$P1 = (1 \ 2 \ 3 \ \underline{10} \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ \underline{11} \ 8 \ 9)$$

$$O2 = (x \ x \ 2 \ \underline{10} \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ \underline{11} \ 9 \ 3)$$

$$P2 = (4 \ 5 \ 2 \ \underline{10} \ 1 \ 8 \ 7 \ 6 \ \underline{11} \ 9 \ 3)$$

## Krzyżowanie z częściowym dopasowaniem

### (PMX)

- Na koniec korzystając z odwzorowania uzupełniamy grupy pozostałymi obiektami:

Odwzorowanie: 1-4, 8-5, 7-6, 6-7

$$O1 = (x \ 2 \ 3 \ \underline{10} \ 1 \ 8 \ 7 \ 6 \ \underline{11} \ x \ 9)$$

$$P1 = (1 \ 2 \ 3 \ \underline{10} \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ \underline{11} \ 8 \ 9) + \{1-4, 8-5\}$$

$$O1 = (4 \ 2 \ 3 \ \underline{10} \ 1 \ 8 \ 7 \ 6 \ \underline{11} \ 5 \ 9)$$

$$O2 = (x \ x \ 2 \ \underline{10} \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ \underline{11} \ 9 \ 3)$$

$$P2 = (4 \ 5 \ 2 \ \underline{10} \ 1 \ 8 \ 7 \ 6 \ \underline{11} \ 9 \ 3) + \{1-4, 8-5\}$$

$$O2 = (1 \ 8 \ 2 \ \underline{10} \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ \underline{11} \ 9 \ 3)$$

## Krzyżowanie z częściowym dopasowaniem

### (PMX)

---

- Krzyżowanie PMX wykorzystuje jednocześnie ważne podobieństwa w wartościach i uporządkowaniu

## Krzyżowanie

---

- Krzyżowanie z częściowym dopasowaniem (PMX)
- Krzyżowanie z uporządkowaniem (OX)

## Krzyżowanie z uporządkowaniem (OX)

- Zaproponowane przez Davisa
- Idea: wybiera losową grupę od jednego rodzica i pozostawia wzajemne uporządkowanie elementów z drugiego rodzica

## Krzyżowanie z uporządkowaniem (OX)

- Mamy dwóch rodziców:  
P1 = (1 2 3 10 4 5 6 7 11 8 9)  
P2 = (4 5 2 10 1 8 7 6 11 9 3)
- Losujemy grupę, która będziemy dziedziczyć (np. grupę 2):  
O1 = (x x x 10 4 5 6 7 11 x x)  
O2 = (x x x 10 1 8 7 6 11 x x)

## Krzyżowanie z uporządkowaniem (OX)

- Bierzemy ciąg elementów z drugiego rodzica (oprócz separatorów) – ciąg zaczynamy od grupy występującej po wybranej grupie

O1 = (x x x 10 4 5 6 7 11 x x)

P2 = (4 5 2 10 1 8 7 6 11 9 3)

9-3-4-5-2-1-8-7-6

- Wykreślamy te elementy które tworzą konflikt

9-3-2-1-8

## Krzyżowanie z uporządkowaniem (OX)

- Mając dany ciąg uzupełniamy puste miejsca w nowym osobniku zaczynając od pustych miejsc w grupie występującej zaraz po wylosowanej grupie

9-3-2-1-8

O1 = (x x x 10 4 5 6 7 11 x x)

O1 = (2 1 8 10 4 5 6 7 11 9 3)

- Podobnie postępujemy z drugim osobnikiem

O1 = (2 1 8 10 4 5 6 7 11 9 3)

O2 = (3 4 5 10 1 8 7 6 11 9 2)

## Krzyżowanie z uporządkowaniem (OX)

- Krzyżowanie OX korzysta z tego, że ważna jest kolejność występowania elementów w ciągu po sobie, a nie ich pozycja w ciągu
- Ciągi 9-3-4-5-2-1-8-7-6 i 4-5-2-1-8-7-6-9-3 są jednakowe

## Mutacja

- W mutacji wymieniamy losowo wybrane dwa geny (elementy) w chromosomie nie wyłączając separatorów np.:  
P = (1 2 3 10 4 5 6 7 11 8 9)  
O = (1 2 6 10 4 5 3 7 11 8 9)

## Rozwiązanie

---

- kodowanie grup za pomocą liczb  
(von Laszewski)
- kodowanie za pomocą separatorów
- grupujący algorytm genetyczny (Falkenauer)

## Grupujący algorytm genetyczny

---

- Zaproponowany przez Falkenauera
- Chromosom składa się z dwóch części:
  - części obiektowej
  - części grupowej
- Część obiektowa – łańcuch całkowitoliczbowy  $n$ -wymiarowy  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ , gdzie  $j$ -ta liczba całkowita  $i_j \in \{1, 2, \dots, k\}$  wskazuje grupę przyporządkowaną obiektowi  $j$
- Część grupowa – łańcuch liczb całkowitoliczbowych reprezentujące poszczególne grupy
- Operatory genetyczne (krzyżowanie i mutacja) pracują na części grupowej.



## Przykład chromosomu

Dla tak określonego osobnika:

I grupa	II grupa	III grupa
{1,3,7,8}	{2,9}	{4,5,6}

chromosom :

(1 2 1 3 3 3 1 1 2 : 1 2 3)

gdzie 1,2,3 oznaczają numery grup

## Operator krzyżowania

□ Rodzice:

P1 = (1 2 1 3 3 3 1 1 2 : 1 2 3)

P2 = (2 3 3 5 6 4 2 2 6 : 2 3 4 5 6)

□ Wybieramy losowo dwa punkty cięcia w każdej części grupowej:

P1 = (1 2 1 3 3 3 1 1 2 : 1 | 2 3 |)

P2 = (2 3 3 5 6 4 2 2 6 : 2 | 3 4 | 5 6)

## Operator krzyżowania

- Następnie zawartość wyciętej części pierwszego rodzica wstawimy w miejsce cięcia u drugiego rodzica

P1 = (1 2 1 3 3 3 1 1 2 : 1 | 2 3 |)

P2 = (2 3 3 5 6 4 2 2 6 : 2 | 3 4 | 5 6)

O = (..... : 2<sub>2</sub> 2<sub>1</sub> 3<sub>1</sub> 3<sub>2</sub> 4<sub>2</sub> 5<sub>2</sub> 6<sub>2</sub>)  
indeksy oznaczają od którego rodzica pochodzi grupa

## Operator krzyżowania

P1 = (1 2 1 3 3 3 1 1 2 : 1 | 2 3 |)

P2 = (2 3 3 5 6 4 2 2 6 : 2 | 3 4 | 5 6)

O = (..... : 2<sub>2</sub> 2<sub>1</sub> 3<sub>1</sub> 3<sub>2</sub> 4<sub>2</sub> 5<sub>2</sub> 6<sub>2</sub>)

- Zawartość grup :
  - grupa 2<sub>2</sub> {1,7,8}
  - grupa 2<sub>1</sub> {2,9}
  - grupa 3<sub>1</sub> {4,5,6}
  - grupa 3<sub>2</sub> {2,3}
  - grupa 4<sub>2</sub> {6}
  - grupa 5<sub>2</sub> {4}
  - grupa 6<sub>2</sub> {5,9}

## Operator krzyżowania

- Usuwamy z listy grup stare grupy, które powodują konflikt, czyli te z indeksem „2” które zawierają elementy znajdujące się w grupie z indeksem „1”

grupa 2<sub>2</sub> {1,7,8}  
grupa 2<sub>1</sub> {2,9}  
grupa 3<sub>1</sub> {4,5,6}  
grupa 3<sub>2</sub> {2,3}  
grupa 4<sub>2</sub> {6}  
grupa 5<sub>2</sub> {4}  
grupa 6<sub>2</sub> {5,9}

Kolorem zaznaczono grupy które **nie** zostaną usunięte

## Operator krzyżowania

- Na podstawie grup, które nie zostały usunięte tworzony jest chromosom potomka, czyli z grup:

grupa 2<sub>2</sub> {1,7,8}  
grupa 2<sub>1</sub> {2,9}  
grupa 3<sub>1</sub> {4,5,6}

Otrzymamy osobnika:

$$O = (2_2 2_1 ? 3_1 3_1 3_1 2_2 2_2 2_1 : 2_2 2_1 3_1)$$

gdzie znak zapytania oznacza, że dany element nie został przydzielony do żadnej grupy

- Po zmianie nazw grup otrzymujemy:

$$O = (1 2 ? 3 3 3 1 1 2 : 1 2 3)$$

## Operator krzyżowania

$$O = (1\ 2\ ?\ 3\ 3\ 3\ 1\ 1\ 2 : 1\ 2\ 3)$$

- Element 3 nie został przyporządkowany do żadnej z grup, w związku z tym tworzymy dodatkową grupę i przypisujemy do niej element 3

$$O = (1\ 2\ 4\ 3\ 3\ 3\ 1\ 1\ 2 : 1\ 2\ 3\ 4)$$

- Podobnie postępujemy tworząc drugiego potomka

## Operator mutacji

- Wybieramy i eliminujemy (losowo) kilka grup
- Obiekty bez przydziału ponownie umieszczamy w grupach w sposób losowy:

$$P = (1\ 2\ 2\ 4\ 5\ 3\ 1\ 1\ 5 : 1\ 2\ 3\ 4\ 5)$$

$$P' = (1\ ?\ ?\ ?\ ?\ 3\ 1\ 1\ ? : 1\ ?\ 3\ ?\ ?)$$

$$O = (1\ 4\ 5\ 4\ 6\ 3\ 1\ 1\ 6 : 1\ 4\ 3\ 5\ 6)$$