

# ALGORYTMY I STRUKTURY DANYCH

## ZBIORY ROZŁĄCZNE

Instytut Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego

Paweł Rzechonek

1. [\*] Dany jest graf nieskierowany  $G = (V, E)$  złożony z  $k$  spójnych składowych. Dla grafu tego wywołano następującą procedurę obliczającą liczbę składowych spójności:

```

function CONECTED-COMPONENTS (graph  $G$ )  $\mapsto$  int
{
    DisjointSets  $S$ ;
     $S.init(G.V)$ ;
    for-each  $(u, v) \in G.E$  do
    {
         $x \leftarrow S.find(u)$ ;
         $y \leftarrow S.find(v)$ ;
        if  $x \neq y$  then  $S.union(x, y)$ ;
    }
    return  $S.count-sets()$ ;
}

```

Ile razy nastąpi wywołanie *find* a ile razy *union*? Odpowiedź uzależnij od wielkości  $|V|$ ,  $|E|$  oraz  $k$ .

2. [\*\*] Dany jest graf nieskierowany  $G = (V, E)$  z ważonymi krawędziami. Jak za pomocą operacji na zbiorach rozłącznych wyznaczyć minimalne drzewo rozpinające grafu? Omów algorytm rozwiązujący to zadanie i przeanalizuj jego złożoność. Ile razy nastąpi wywołanie *find()* a ile razy *union()*? Odpowiedź uzależnij od wielkości  $|V|$  i  $|E|$ .
3. [\*\*] Rozważmy listową implementację zbiorów rozłącznych z łączeniem węzłóg rozmiaru list (krótszą listę podłączamy do dłuższej). Wykaż, że dla danych rozmiaru  $n$  ciąg  $n - 1$  operacji *union* wykona się w czasie  $O(n \log n)$ .  
*Wskazówka:* Czas mierzymy liczbą zmian dokonywanych w węzłach na wskaźniku *head* (wskaźniku do reprezentanta zbioru).
4. [\*\*] Zaproponuj efektywną strukturę danych do wykonywania ciągów podanych operacji na dynamicznie zmieniającym się podziale zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$ :
- **init()** — utworzenie podziału  $\{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}$ ;
  - **union(A,B)** — połączenie zbiorów  $A$  i  $B$  bieżącego podziału w jeden zbiór;

- `find(x)` — wyznaczenie zbioru, do którego należy element  $x$ ;
- `find-smallest()` — wyznaczenie zbioru bieżącego podziału, który ma najmniej elementów.

Pesymistyczna złożoność tych operacji powinna być rzędu  $O(\log n)$ ?

5. **[\*\*]** Zaimplementuj operacje *union* i *find* dla drzewiastej reprezentacji zbiorów rozłącznych ze zbalansowanym łączeniem i kompresją ścieżek. Jak zaimplementować operację *union* bez używania rekurencji?
6. **[\*]** Dana jest rodzina  $n$  jednoelementowych zbiorów rozłącznych. Zbiory te będziemy pamiętali w postaci drzewiastej ze zbalansowanym łączeniem. Skonstruuj ciąg  $n-1$  operacji *union*, by w ich wyniku powstał jeden zbiór reprezentowany przez  $n$  elementowe drzewo o wysokości  $\lfloor \log n \rfloor$ .