

ALGORYTMY I STRUKTURY DANYCH

PROGRAMOWANIE DYNAMICZNE

Instytut Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego

Paweł Rzechonek

1. [*] Udowodnij, że algorytm wyznaczający współczynnik dwumianowy $\binom{n}{k}$ oparty na metodzie “dziel i zwyciężaj” oblicza w sumie $2\binom{n}{k} - 1$ współczynników.
2. **[**] Pokaż, jak obliczyć współczynnik dwumianowy $\binom{n}{k}$ używając tablicy pomocniczej $L[0 \dots k]$ oraz $O(1)$ dodatkowych komórek pamięci. Następnie pokaż, jak rozwiązać to zadanie używając jeszcze mniejszej tablicy pomocniczej $L[0 \dots \min(k, n - k)]$ oraz $O(1)$ dodatkowych komórek pamięci.
3. **[**] Zmodyfikuj podany na wykładzie algorytm dla problemu optymalnego mnożenia macierzy, tak aby wypisywał on ciąg n macierzy wraz z poprawnie rozstawionymi nawiasami na podstawie wyliczonej w trakcie działania algorytmu tablicy pomocniczej $L[1 \dots n][1 \dots n]$. Samo wypisanie wspomnianego ciągu macierzy wraz z nawiasami powinno posiadać złożoność czasową rzędu $O(n)$.
4. **[**] Rozważmy dwa algorytmy obliczania optymalnego nawiasowania iloczynu n macierzy:
 - (a) algorytm naiwny, polegający na wygenerowaniu wszystkich poprawnych nawiasowań i obliczeniu liczby mnożeń skalarów w każdym z nich;
 - (b) algorytm rekurencyjny, oparty na metodzie “dziel i zwyciężaj”.

Który z tych sposobów jest efektywniejszy? Odpowiedź uzasadnij obliczeniami.

5. **[**] Pokaż, jak obliczyć długość największego wspólnego podciągu używając tablicy pomocniczej $L[0 \dots 2 \min(n, m)]$ oraz $O(1)$ dodatkowych komórek pamięci. Następnie pokaż, jak rozwiązać to zadanie używając jeszcze mniejszej tablicy pomocniczej $L[0 \dots \min(n, m)]$ oraz $O(1)$ dodatkowych komórek pamięci.
6. [***] Uogólnij algorytm znajdowania optymalnego drzewa BST dla uporządkowanego zbioru n wartości $s_1 < s_2 < \dots < s_n$ na przypadek, gdy znane są prawdopodobieństwa zapytań o każdą wartość $p_1, p_2, \dots, p_n$ oraz prawdopodobieństwa zapytań o wartości spoza tego zbioru $q_0, q_1, \dots, q_n$ (q_i to prawdopodobieństwo zapytania o wartość znajdującą się pomiędzy s_i a s_{i+1} , dla $i = 1, \dots, n - 1$; natomiast q_0 to prawdopodobieństwo zapytania o wartość mniejszą od s_1 , a q_n o wartość większą od s_n). Uzasadnij poprawność zaproponowanego algorytmu i przeanalizuj jego złożoność. Oczywiście zachodzi równość $\sum_{i=1}^n p_i + \sum_{i=0}^n q_i = 1$.

7. [***] Dany jest zbiór n punktów na płaszczyźnie $P = \{p_1, \dots, p_n\}$, które są wierzchołkami wielokąta wypukłego. Przedstaw algorytm, który podzieli ten wielokąt przekątnymi (odcinkami łączącymi niesąsiednie wierzchołki) na $n - 2$ rozłącznych trójkątów, tak aby suma długości wszystkich wewnętrznych odcinków (przekątnych dzielących wielokąt na trójkąty) była minimalna.
8. [***] Niech dany będzie spójny graf skierowany z nieujemnymi wagami na krawędziach $D = (V, E, w : E \mapsto \mathbf{R}_+)$. Przeanalizuj algorytm Floyda wyznaczania najkrótszych ścieżek dla każdej pary wierzchołków w takim grafie. Uzasadnij jego poprawność i oszacuj złożoność obliczeniową.