

ALGORYTMY I STRUKTURY DANYCH

PROBLEMY NP-ZUPEŁNE

Instytut Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego

Paweł Rzechonek

1. [*] Dla wymienionych problemów optymalizacyjnych podaj ich wersje decyzyjne i opisz związane z nimi wielomianowe algorytmy weryfikacji:
 - (a) *problem kolorowania grafu*: polega na znalezieniu minimalnej liczby kolorów (liczba chromatyczna grafu) potrzebnych do takiego pokolorowania wierzchołków grafu prostego, aby żadne dwa sąsiednie wierzchołki nie miały takiego samego koloru;
 - (b) *problem kliki*: polega na wyznaczeniu rozmiaru maksymalnej kliky w grafie prostym (kliką to podgraf pełny).
2. [**] Rozważmy problem optymalizacyjny LONGEST-CYCLE-LENGTH znajdowania najdłuższego cyklu prostego w grafie. Zdefiniuj formalnie związany z nim problem decyzyjny LONGEST-CYCLE. Wykaż, że problem optymalizacyjny LONGEST-CYCLE-LENGTH można rozwiązać w czasie wielomianowym wtedy i tylko wtedy, gdy problem decyzyjny LONGEST-CYCLE należy do klasy **P**.
3. [**] Rozważmy dwa grafowe problemy decyzyjne:
 - (a) Niech dany będzie graf prosty $G = (V, E)$. Mówimy, że zbiór wierzchołków $S \subseteq V$ jest *niezależny*, gdy żadne dwa wierzchołki $u, v \in S$ z tego zbioru nie są połączone krawędzią ($u, v \notin E$). Problem zbioru niezależnego INDEPENDENT-SET można więc sformułować następująco: dla zadanego grafu G i liczby k , sprawdź czy w G istnieje zbiór niezależny o rozmiarze co najmniej k .
 - (b) Niech dany będzie graf prosty $G = (V, E)$. Mówimy, że zbiór wierzchołków $S \subseteq V$ jest *pokryciem wierzchołkowym*, gdy co najmniej jeden z końców każdej krawędzi $(u, v) \in E$ znajduje się w S . Problem pokrycia wierzchołkowego VERTEX-COVER można zatem sformułować następująco: dla zadanego grafu G i liczby k , sprawdź czy w G istnieje pokrycie wierzchołkowe o rozmiarze co najmniej k .

Wykaż, że problemy te redukują się wielomianowo:

$$\begin{aligned}\text{INDEPENDENT-SET} &\propto \text{VERTEX-COVER} \\ \text{VERTEX-COVER} &\propto \text{INDEPENDENT-SET}\end{aligned}$$

4. [***] Oznaczmy przez 2-CNF problem spełnialności formuł CNF o dokładnie 2 literalach w każdej klauzuli. Wykaż, że $2\text{-CNF} \in \mathbf{P}$.
Wskazówka! Zauważ, że formuła $x \vee y$ jest równoważna z formułą $\neg x \Rightarrow y$. Zredukuj 2-CNF do takiego problemu w grafie skierowanym, który ma efektywne rozwiązanie.

5. [***] Wiedząc, że problem 3-spełnialności formuł logicznych 3-CNF jest **NP**-zupełny, udowodnij, że problem kliki w grafie również jest **NP**-zupełny.
- Wskazówka!* Niech $\varphi = C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_k$ będzie formułą logiczną o k klauzulach, gdzie każda klauzula $C_r = (l_1^r \vee l_2^r \vee l_3^r)$ dla $r = 1 \dots k$ zawiera dokładnie trzy różne literały l_1^r , l_2^r i l_3^r . Na podstawie φ formuły logicznej 3-CNF skonstruuj graf $G = (V, E)$ w następujący sposób. Każdej klauzuli $C_r = (l_1^r \vee l_2^r \vee l_3^r)$ w φ niech odpowiada trójka wierzchołków $v_1^r, v_2^r, v_3^r \in V$. Wierzchołki v_i^r i v_j^s łączymy krawędzią $(v_i^r, v_j^s) \in E$, gdy zachodzą obydwa warunki:
- (a) v_i^r i v_j^s są w różnych trójkach, czyli $r \neq s$, oraz
 - (b) odpowiadające im literały l_i^r i l_j^s są niesprzeczne, czyli l_i^r nie jest zaprzeczeniem l_j^s (jeśli $l_i^r = z$ i $l_j^s = \neg z$ to $(v_i^r, v_j^s) \notin E$).
6. [**] Wiedząc, że problem 3-spełnialności formuł logicznych 3-CNF jest **NP**-zupełny, udowodnij, że problem 3-kolorowania grafu również jest **NP**-zupełny.