

ALGORYTMY I STRUKTURY DANYCH

EFEKTYWNOŚĆ ALGORYTMÓW

Instytut Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego

Paweł Rzechonek

1. [*] Udowodnij, że $\log \binom{2n}{n} \in O(n \log n)$ oraz $\log \binom{2n}{n} \in \Omega(n)$. Czy potrafisz oszacować funkcję $\log \binom{2n}{n}$ za pomocą operatora Θ ?
2. [*] Pokaż, że funkcja $(n \cdot \cos \frac{n\pi}{4})^2$ nie należy ani do $O(n)$ ani do $\Omega(n)$.
3. [*] Korzystając z definicji o i ω udowodnij, że funkcja $2n + 12$ należy do $o(n^2)$, ale nie należy do $\omega(n^2)$.
4. [**] Wykaż poprawność semantyczną za pomocą niezmienników, że następujący algorytm przenosi wartość minimalną na początek tablicy:

```
procedure MOVE-MIN (num  $T[0 \dots n-1]$ )
{
    for  $i = 1 \dots n-1$  do
        if  $T_0 > T_i$  then  $T_0 \longleftrightarrow T_i$ 
}
```

5. [**] Dane są dwie k -bitowe liczby naturalne. Oszacuj pesymistyczny i oczekiwany czas ich porównywania przy założeniu, że każda dopuszczalna wartość tych liczb jest jednakowo prawdopodobna.
6. [*] Przypomnij sobie procedurę mnożącą dwie długie liczby naturalne *po rosyjsku*. Załóżmy, że liczby te mogą mieć różne długości. Jaki wpływ na czas działania tego algorytmu może mieć wcześniejsze uporządkowanie tych liczb względem ich wielkości?
7. [**] Dana jest rzeczywista macierz kwadratowa M o rozmiarze $m \times m$ i liczba naturalna n . Podaj algorytm obliczania M^n , który wykonuje jedynie $\Theta(\log n)$ mnożeń macierzy. Uzasadnij poprawność przedstawionego rozwiązania.
8. [**] Czy *metodę macierzową* obliczania n -tej liczby Fibonacciego można uogólnić na inne ciągi, w których kolejne elementy są definiowane liniową kombinacją skończonej liczby elementów wcześniejszych? Jak bardzo zadanie się skomplikuje, gdy dopuścimy występowanie stałego składnika w kombinacji liniowej?
9. [**] Rozważ następujące struktury danych reprezentujące graf prosty o N wierzchołkach i M krawędziach:
 - macierz sąsiedztwa,
 - uporządkowane listy sąsiadów.

Dla każdej z tych struktur oblicz:

- (a) rozmiar pamięci, w której jest przechowywany graf;
- (b) czas potrzebny na sprawdzenie, czy istnieje w grafie krawędź (v_i, v_j) ;
- (c) czas potrzebny do zliczenia wszystkich wierzchołków izolowanych;
- (d) czas potrzebny do wyznaczenia stopnia wierzchołka v ;
- (e) czas potrzebny do wyznaczenia wszystkich sąsiadów wierzchołka v .