ćwiczenia (licencjat dzienny): lista zadań nr 2 *17 października 2007 r.*

ALGORYTMY I STRUKTURY DANYCH

SORTOWANIE

Instytut Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego *Paweł Rzechonek*

1. [**] Jakie jest dokładne dolne ograniczenie na liczbę porównań dla algorytmu sortującego 5 elementów? Podaj algorytm, który posortuje 5–elementową tablicę tylko przy pomocy porównań i zamian, i który wykona nie więcej porównań niż to wynika z dolnej granicy.

2. [**] Wykaż, że algorytm *sortowania bąbelkowego* na ciągu n–elementowym wykona liniową liczbę zamian elementów w przypadku (chociaż liczba porównań zawsze będzie kwadratowa), gdy liczba inwersji związanych z każdym elementem jest rzędu $O(1)$.

3. [***] Bedziemy uruchamiać algorytm *sortowania bąbelkowego* na n–elementowych ciągach. Rozważmy trzy szczególne przypadki takich ciągów:

   (a) ciag posortowany (0 inwersji);

   (b) ciąg posortowany, w którym zamieniono miejscami parę elementów, pierwszy położony blisko początku a drugi blisko końca tablicy (w przypadku zamiany elementu pierwszego z ostatnim liczba inwersji wyniesie $2n - 3$);

   (c) wewnątrz posortowanego ciągu wyróżniono blok rozmiaru $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$, w którym odwrócono kolejność elementów (liczba inwersji wyniesie $\frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor\cdot\lfloor\sqrt{n}-1\rfloor}{2}$).

   Dokonaj takiej modyfikacji w algorytmie sortowania bąbelkowego, która spowoduje, że dla wymienionych przypadków będzie on działał w czasie liniowym $O(n)$.

4. [**] Wykaż, że algorytm *sortowania przez wstawianie* na ciągu n-elementowym wykona liniową liczbę porównań i zamian (będzie działał w liniowym czasie), gdy całkowita liczba inwersji w sortowanym ciągu jest rzędu $O(n)$.

5. [***] W posortowanym ciągu dokonujemy losowej transpozycji (zamiany pary elementów miejscami). Ile porównań elementów w średnim przypadku wykona algorytm *sortowania przez wstawianie*, gdy uruchomimy go na takim ciągu?

6. [**] Dana jest prostokątna tablica elementów, które możemy porównywać za pomocą relacji $\leq$. W tablicy tej najpierw sortujemy wszystkie wiersze, a potem wszystkie kolumny. Wykaż, że po posortowaniu kolumn wiersze nadal pozostaną posortowane.

7. [***] Dany jest n–elementowy ciąg elementów, które możemy porównywać za pomocą relacji $\leq$, oraz dwie liczby naturalne p i q, takie że $1 < p < q < n$. Na ciągu tym wykonujemy najpierw q–sortowanie, a potem p–sortowanie. Wykaż, że po wykonaniu p–sortowania ciąg ten będzie nadal q–posortowany.